위대한 김일성동지와 김정일동지는
영원히 우리와 함께 계신다

김일성종합대학학보

수 학

제65권

JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
Mathematics Vol. 65 No. 4



김일성종합대학출판사

4

주체108(2019)

김일성종합대학학보 주체108(2019)년 제65권 제4호
수 학 (루계 제576호)

차 례

김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

융합프레임에 관하여 성긴표현을 가지는 신호의 회복을 위한 원시-쌍대알고리듬

조유성, 최철국, 리추명

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《수학은 모든 자연과학의 기초로 될뿐아니라 사회현상을 연구하는데서도 중요한 수단으로 됩니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제10권 478페지)

론문에서는 원시-쌍대알고리듬을 리용하여 최근시기 신호압축수감분야에서 활발히 연구되고있는 융합프레임에 관하여 성긴표현을 가지는 신호의 회복을 위한 원시-쌍대알고리듬에 대하여 연구하였다.

1. 선행연구결과

관측잡음이 있는 경우 융합프레임에 관하여 성긴표현을 가지는 신호의 회복을 위한 토대추적문제는 다음과 같이 정식화할수 있다.

$$\hat{\boldsymbol{c}} = \underset{\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^{\sum m_j}}{\arg\min} \|\boldsymbol{c}\|_{2,1} \quad \text{제한조건} \quad \|\boldsymbol{A_I U c} - \boldsymbol{y}\|_{2,\,2} \le \eta \tag{1}$$

여기서 $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{U}_2 & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{U}_N \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{MN\times\sum m_j}$ 이고 $\boldsymbol{A_I} = (a_{ij}\boldsymbol{I}_M)_{1\le i\le m,\,1\le j\le N}$ 이며 $\boldsymbol{I}_M$ 은 M 차단위행렬을 표시한다. $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{1\le i\le m,\,1\le j\le N}$ 은 수감행렬이며 $\boldsymbol{U}_i$ $(i=1,\ \cdots,\ N)$ 들은 융합프레임을 구성하는 부분공간들의 표준직교토대를 렬벡토르로 가지는 $M\times m_i$ 형행렬이다.

관측은

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}_i)_{i=1}^m = \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}\boldsymbol{x}_j^0\right)_{i=1}^m \in \boldsymbol{K} \tag{2}$$

와 같이 주어지는데 여기서 $\boldsymbol{K} = \{(\boldsymbol{y}_i)_{i=1}^m \mid \boldsymbol{y}_i \in \mathbf{R}^M,\ \forall i\in[m]\}$ 이고 $[m]=\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$ 이다.

선행연구[4]에서는 원시-쌍대알고리듬에 의하여 단일관측모형인 경우 성긴신호의 회복에 대하여 론의하였다. 다중관측모형인 경우에도 블로크자리표하강알고리듬, 교대방향법, 분할브레그만방법[5]에 의한 동시적성긴신호의 회복에 대하여 고찰하고 수치실험을 통하여 분할브레그만방법에 의한 회복결과가 블로크자리표하강알고리듬이나 교대방향법들을 리용한 결과보다 정확도가 더 높다는것을 밝혔다.

동시적성김성은 융합프레임에 관한 성김성의 특수경우라는 사실로부터 융합프레임에 관한 성긴신호를 분할브레그만방법을 리용하여 회복할수도 있다. 선행연구[1-3]에서는 원시-쌍대알고리듬을 리용하여 전변동최소화를 통한 화상회복을 진행하였는데 실험결과를

보면 원시－쌍대알고리듬이 브레그만형알고리듬보다 우월한 성능을 나타낸다는것을 보여주었다.

이로부터 론문에서는 융합프레임에 관하여 성긴표현을 가지는 신호의 회복을 위한 원시－쌍대알고리듬을 제기하고 그 수렴성을 증명하였다.

2. 기 본 결 과

1) 원시－쌍대알고리듬

여기서는 관측잡음이 있는 경우 융합프레임에 관한 성긴표현을 가지는 신호의 회복을 위한 원시－쌍대알고리듬을 제기한다.

최량화문제 (1)은

$$\hat{\boldsymbol{c}} = \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^{\sum m_j}} G(\boldsymbol{c}) + F(\boldsymbol{A_I U c}) \tag{3}$$

와 동등하다. 여기서

$$G(\boldsymbol{c}) = \|\boldsymbol{c}\|_{2,1},\ F(\boldsymbol{z}) = \chi_{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},\eta)} = \begin{cases} 0, & \|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\|_{2,2} \le \eta \\ \infty, & \text{기타} \end{cases}$$

이다.

최량화문제 (1)을 풀기 위한 원시－쌍대알고리듬은 다음과 같이 주어진다.

$$\boldsymbol{\xi}^{n+1} = P_{F^*}(\sigma; \boldsymbol{\xi}^n + \sigma \boldsymbol{A_I U}\bar{\boldsymbol{c}}^n) = \\ = \begin{cases} \boldsymbol{0}, & \|\sigma^{-1}\boldsymbol{\xi}^n + \boldsymbol{A_I U}\bar{\boldsymbol{c}}^n - \boldsymbol{y}\|_{2,2} \le \eta \\ \left(1 - \dfrac{\sigma\eta}{\|\boldsymbol{\xi}^n + \sigma(\boldsymbol{A_I U}\bar{\boldsymbol{c}}^n - \boldsymbol{y})\|_{2,2}}\right)(\boldsymbol{\xi}^n + \sigma(\boldsymbol{A_I U}\bar{\boldsymbol{c}}^n - \boldsymbol{y})), & \text{기타} \end{cases} \tag{4}$$

$$(\boldsymbol{c}^{n+1})_j = S_\tau((\boldsymbol{c}^n - \tau(\boldsymbol{A_I U})^* \boldsymbol{\xi}^{n+1})_j) = \\ = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{\tau}{\|(\boldsymbol{c}^n - \tau(\boldsymbol{A_I U})^* \boldsymbol{\xi}^{n+1})_j\|_2}\right)(\boldsymbol{c}^n - \tau(\boldsymbol{A_I U})^* \boldsymbol{\xi}^{n+1})_j, & \|(\boldsymbol{c}^n - \tau(\boldsymbol{A_I U})^* \boldsymbol{\xi}^{n+1})_j\|_{2,2} \ge \tau \\ \boldsymbol{0}, & \text{기타} \end{cases} \tag{5}$$

$$\bar{\boldsymbol{c}}^{n+1} = \boldsymbol{c}^{n+1} + \theta(\boldsymbol{c}^{n+1} - \boldsymbol{c}^n) \tag{6}$$

2) 알고리듬의 수렴성

정리 1 $(\boldsymbol{c}^\#,\ \boldsymbol{\xi}^\#)$ 이 θ 의 선택에 무관계하게 알고리듬 (4)－(6)의 부동점이기 위해서는 $(\boldsymbol{c}^\#,\ \boldsymbol{\xi}^\#)$ 이 문제 (3)의 원시－쌍대최량점일것이 필요하고 충분하다.

정리 2 문제 (3)이 풀이를 가진다고 가정하자. $\theta = 1,\ \sigma,\ \tau > 0$ 을 $\sigma\tau\|\boldsymbol{A_I}\|_{2,2}^2 < 1$ 이 성립하도록 취하자. 그리고 $(\boldsymbol{c}^n,\ \bar{\boldsymbol{c}}^n,\ \boldsymbol{\xi}^n)_{n\ge 0}$ 을 알고리듬 (4)－(6)에 의해 생성되는 렬이라고 하자. 이때 $(\boldsymbol{c}^n)$ 은 문제 (3)의 풀이에로 수렴한다.

참 고 문 헌

[1] D. L. Donoho; IEEE Trans. Inform. Theory, 52, 4, 1289, 2006.
[2] P. Boufounos et al.; IEEE Trans. Inform. Theory, 57, 7, 4660, 2011.
[3] U. Ayaz et al.; Appl. Comput. Harmon. Anal., 41, 341, 2016.
[4] S. Foucart et al.; A Mathematical Introduction to Compressive Sensing, Birkhauser, 500～613, 2013.
[5] Jian Zou; Multidimensional Systems and Signal Processing, 26, 207, 2015.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

Primal-Dual Algorithm for Recovery of Fusion Frame Sparse Signals

Jo Yu Song, Choe Chol Guk and *Ri Chu Myong*

In this paper, we propose a primal-dual algorithm for recovery of fusion frame sparse signals and prove the convergence of the algorithm.

Key words: fusion frame, primal-dual algorithm

김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

비선형적분을 포함하는 다항분수계미분방정식을 풀기 위한 스펙트르점배치법

조선향, 강영숙

론문에서는 비선형적분을 포함하는 다항분수계미분방정식을 풀기 위한 스펙트르점배치법을 연구하였다.

선행연구[1－3]에서는 선형 또는 비선형적분을 포함하는 단항분수계미분방정식을 다항식스플라인, 아도미안분해법, 혼합점배치법을 리용하여 풀었다. 또한 선행연구[4]에서는

$$y(t)=\sum_{j=0}^{r}d_j\,{}_a^cD_t^{\alpha_j}y(t)+\lambda G\left(t,\ y(t),\ \int_a^t k(t,\ s)F(s,\ y(s))ds\right)+f(t)\ \ (t\in[a,\ b])$$

$$y(a)=0,\ 0<\alpha_j\le 1$$

형태의 분수계미적분방정식을 풀기 위한 한가지 점배치도식을 제기하고 $d_j\in[0,\ 1)$ $(j=0,\ 1\ 2,\ \cdots,\ r)$, $-1<\lambda<1$인 조건하에서 수렴성을 론의하였다.

선행연구[5]에서는 분수계미적분방정식을 풀기 위한 준스펙트르적분행렬을 계산하는 방법을 주고 구체적인 변결수선형, 비선형분수계미적분방정식에 대한 계산도식을 유도하였으며 선형인 경우 수렴성을 증명하였다.

론문에서는

$$\begin{aligned}&{}_a^cD_t^{\delta}y(t)=\sum_{j=0}^{r}d_j\,{}_a^cD_t^{\alpha_j}y(t)+\lambda G\left(t,\ y(t),\ \int_a^t k(t,\ s)F(s,\ y(s))ds\right)+f(t)\\&y^{(j)}(a)=\chi_j\ \ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ \lceil\delta\rceil-1)\qquad\qquad(1)\\&0<\alpha_j\le\delta\ \ (j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ r)\end{aligned}$$

와 같은 형태의 분수계미적분방정식에 대한 스펙트르점배치법의 계산도식을 제기하고 풀이의 유일존재성과 근사풀이의 수렴성해석, 수치실험을 진행하였다.

정의 [5] $-1=\tau_0<\cdots<\tau_{N+1}=1$인 가우스점들 $\{\tau_k\in(-1,\ 1)\}_{i=1}^N$에 대한 왼쪽, 오른쪽 $\gamma-$계준스펙트르적분행렬(FPIM)들은 다음과 같이 정의된다.

$$_{-1}^{\ \tau}I_{ki}^{\gamma}={}_{-1}I_{\tau_k}^{\gamma}L_i(\tau)\ \ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ N+1;\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$$

$$_{\tau}^{1}I_{ki}^{\gamma}={}_{\tau_k}I_1^{\gamma}L_i(\tau)\ \ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ N;\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$$

여기서 $\{L_i(\tau)\}_{i=1}^N$들은 $L_i(\tau)=\prod_{j=1,\ j\ne i}^{N}\dfrac{\tau-\tau_j}{\tau_i-\tau_j}$인 라그랑쥬토대이다.

보조정리 1 [5] $\{\tilde{p}_j(\tilde{\tau})\}_{j=0}^{N-1}$을 구간 $[0,\ 1]$에서 $\{p_j(\tau)\}_{j=0}^{N-1}$에 대응하는 직교다항식이라고 하고 $\tilde{p}_j(\tilde{\tau})=\sum_{m=0}^{j}\tilde{c}_m^j\tilde{\tau}^m$이라고 가정하자. $\{\tilde{c}_m^j\}_{m=0}^j$는 전개결수이다. 그러면 왼쪽 FPIM들

은 정확히 다음과 같이 계산될수 있다.

$$ {}_{-1}^{\tau}I_{ki}^{\gamma}=2^{\gamma}\tilde{\omega}_i\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\tilde{p}_j(\tilde{\tau}_i)}{\tilde{\lambda}_j}\left(\sum_{m=0}^{j}\tilde{c}_m^{\,j}\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\gamma+1)}\tilde{\tau}_k^{m+\gamma}\right)\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ N+1;\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N) $$

$$ {}_{-1}^{\tau}I_{ki}^{\gamma}=2^{\gamma}\hat{\tilde{\omega}}_i\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\hat{\tilde{p}}_j(\hat{\tilde{\tau}}_i)}{\tilde{\lambda}_j}\left(\sum_{m=0}^{j}\tilde{c}_m^{\,j}\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\gamma+1)}\hat{\tilde{\tau}}_k^{m+\gamma}\right)\ (k,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N) $$

여기서 $\{\tilde{\tau}_i,\ \tilde{\omega}_i\}_{i=1}^{N}$, $\{\hat{\tilde{\tau}}_i,\ \hat{\tilde{\omega}}_i\}_{i=1}^{N}$ 들은 이동가우스, 라다우점들과 구적무게들의 모임이다.

분수계미적분방정식 (1)에 대한 스펙트르점배치도식을 유도하자.

변수변환 $t=(b-a)\tau/2+(b+a)/2$ 를 실시하면 방정식 (1)은 다음과 같이 표시된다.

$$ \left(\frac{2}{b-a}\right)^{\delta}{}_{-1}^{\ c}D_{\tau}^{\delta}\tilde{y}(\tau)=\sum_{j=1}^{r}d_j\left(\frac{2}{b-a}\right)^{\alpha_j}{}_{-1}^{\ c}D_{\tau}^{\alpha_j}\tilde{y}(\tau)+\lambda\tilde{G}\left(\tau,\ \tilde{y}(\tau),\ \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{\tau}\tilde{k}(\tau,\ \xi)\tilde{F}(\xi,\ \tilde{y}(\xi))d\xi\right)+\tilde{f}(\tau) \tag{2} $$

$$ \tilde{y}^{(j)}(-1)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^{j}\chi_j\ \ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ \lceil\delta\rceil-1) \tag{3} $$

여기서

$$ \tilde{y}(\tau)=y\left(\frac{b-a}{2}\tau+\frac{b+a}{2}\right),\ \tilde{f}(\tau)=f\left(\frac{b-a}{2}\tau+\frac{b+a}{2}\right) $$

$$ \tilde{k}(\tau,\ \xi)=k\left(\frac{b-a}{2}\tau+\frac{b+a}{2},\ \frac{b-a}{2}\xi+\frac{b+a}{2}\right) $$

$$ \tilde{F}(\xi,\ \tilde{y}(\xi))=F\left(\frac{b-a}{2}\xi+\frac{b+a}{2},\ y\left(\frac{b-a}{2}\xi+\frac{b+a}{2}\right)\right) $$

$$ \tilde{G}\left(\tau,\ \tilde{y}(\tau),\ \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{\tau}\tilde{k}(\tau,\ \xi)\tilde{F}(\xi,\ \tilde{y}(\xi))d\xi\right)=G\left(\frac{b-a}{2}\tau+\frac{b+a}{2},\ y\left(\frac{b-a}{2}\tau+\frac{b+a}{2}\right),\right. $$

$$ \left.\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{\tau}k\left(\frac{b-a}{2}\tau+\frac{b+a}{2},\ \frac{b-a}{2}\xi+\frac{b+a}{2}\right)F\left(\frac{b-a}{2}\xi+\frac{b+a}{2},\ y\left(\frac{b-a}{2}\xi+\frac{b+a}{2}\right)\right)d\xi\right) $$

량변에 분수계적분연산자 ${}_{-1}I_{\tau}^{\delta}$ 를 작용시키고 초기조건을 대입하면 다음식이 얻어진다.

$$ \begin{aligned} \tilde{y}(\tau)=&\sum_{j=1}^{r}d_j\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\delta-\alpha_j}{}_{-1}I_{\tau}^{\delta-\alpha_j}\tilde{y}(\tau)+\sum_{j=0}^{\lceil\delta\rceil-1}\frac{((b-a)/2)^j\chi_j}{j!}(\tau+1)^j+\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\delta}{}_{-1}I_{\tau}^{\delta}\tilde{f}(\tau)+\\ &+\lambda\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\delta}{}_{-1}I_{\tau}^{\delta}\tilde{G}\left(\tau,\ \tilde{y}(\tau),\ \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{\tau}\tilde{k}(\tau,\ \xi)\tilde{F}(\xi,\ \tilde{y}(\xi))d\xi\right)-\\ &-\sum_{j=1}^{r}d_j\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\delta-\alpha_j}\sum_{i=0}^{\lceil\alpha_j\rceil-1}\frac{((b-a)/2)^i\chi_i}{\Gamma(i+\delta-\alpha_j+1)}(\tau+1)^{i+\delta-\alpha_j} \end{aligned} \tag{4} $$

근사풀이형태를 $\tilde{y}_N(\tau)=\sum_{k=1}^{N+1}y_kL_k(\tau)$ 로 놓고 식 (5)에 대입할 때 점배치점에서 대입차가

령이 되도록 근사도식을 구성하겠다. 비선형함수 G와 F를 라그랑쥬근사시킨 다음 가우스점을 점배치하고 FPIM을 리용하면 근사도식은 다음과 같이 된다.

$$\hat{\hat{y}}_k = \sum_{j=1}^{r} d_j \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\delta-\alpha_j} \left(\sum_{i=1}^{N+1} {}_{-1}^{\tau}I_{ki}^{\delta-\alpha_j} \hat{\hat{y}}_i \right) + \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\delta} {}_{-1}I_{\tau_k}^{\delta} \tilde{f}(\tau) +$$
$$+ \sum_{j=0}^{\lceil\delta\rceil-1} \frac{((b-a)/2)^j \chi_j}{j!} (\tau_k+1)^j - \sum_{j=1}^{r} d_j \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\delta-\alpha_j} \sum_{i=0}^{\lceil\alpha_j\rceil-1} \frac{((b-a)/2)^i \chi_i}{\Gamma(i+\delta-\alpha_j+1)} (\tau_k+1)^{i+\delta-\alpha_j} +$$
$$+ \lambda \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\delta} \sum_{i=1}^{N+1} {}_{-1}^{\tau}I_{ki}^{\delta} \tilde{G}\left(\tau_i,\ \hat{\hat{y}}_i,\ \frac{b-a}{2} \sum_{l=1}^{N+1} \tilde{F}(\tau_l,\ \hat{\hat{y}}_l) \int_{-1}^{\tau_i} \tilde{k}(\tau_i,\ \xi) L_l(\xi) d\xi \right) \tag{5}$$

련립대수방정식을 풀어 $\{\hat{\hat{y}}_k\}_{k=1}^{N+1}$들을 구한 다음 라그랑쥬보간하여 근사풀이를 얻는다. 변환 $\tau = (2t-a-b)/(b-a)$를 실시하여 구간 $[a,\ b]$에로 넘긴다.

보조정리 2 함수 G와 f가 련속이라고 하자. 함수 $y(t) \in C^{\lceil\delta\rceil}[a,\ b]$가 분수계미적분방정식 (1)의 풀이이면 $h(t) = {}_a^cD_t^{\delta} y(t)$로 정의되는 함수 $h(t)$는 $C[a,\ b]$에서 분수계적분방정식

$$h(t) = \sum_{j=1}^{r} d_j\, {}_aI_t^{\delta-\alpha_j} h(t) + \sum_{j=1}^{r} d_j \sum_{i=\lceil\alpha_j\rceil}^{\lceil\delta\rceil-1} \frac{\chi_i}{\Gamma(i-\alpha_j+1)} (t-a)^{i-\alpha_j} +$$
$$+ \lambda G\left(t,\ {}_aI_t^{\delta} h(t) + \sum_{j=1}^{\lceil\delta\rceil-1} \frac{\chi_j}{j!}(t-a)^j,\ \int_a^t k(t,\ s) F\left(s,\ {}_aI_s^{\delta} h(s) + \sum_{j=1}^{\lceil\delta\rceil-1} \frac{\chi_j}{j!}(s-a)^j \right) ds \right) + f(t) \tag{6}$$

의 풀이이다. 거꾸로 $h(t)$가 식 (6)의 풀이이면

$$y(t) = {}_aI_t^{\delta} h(t) + \sum_{j=1}^{\lceil\delta\rceil-1} \frac{\chi_j}{j!}(t-a)^j$$

인 $y(t) \in C^{\lceil\delta\rceil}[a,\ b]$는 식 (1)의 풀이이다.

정리 1 분수계미적분방정식 (1)에 대하여 다음의 조건을 만족시킨다고 하자.

① $G(t,\ y,\ z)$는 t에 관하여 구간 $[a,\ b]$에서 련속이다.

② $G(t,\ y,\ z)$는 $y,\ z$에 관하여 립쉬츠련속이다.($m_2,\ m_3$이 립쉬츠상수)

③ $F(t,\ y)$는 y에 관하여 립쉬츠련속이다.(M은 립쉬츠상수)

④ $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} \frac{|d_j|(b-a)^{\delta-\alpha_j}}{\Gamma(\delta-\alpha_j+1)} + |\lambda| m_2 \frac{(b-a)^{\delta}}{\Gamma(\delta+1)} + |\lambda| m_3 BM \frac{(b-a)^{\delta+1}}{\Gamma(\delta+1)} < 1$

이때 식 (1)은 유일풀이를 가진다.

정리 2 분수계미적분방정식 (1)에 대하여 다음의 조건을 만족시킨다고 하자.

① 정리 1의 조건 ①의 풀이 $y(t)$와 t의 함수 $G,\ F$에 대하여 $y,\ G,\ F \in H_{w^{(\alpha,\beta)}}^{m}(a,\ b)$ $(m \ge 1)$이다.

② $G(t,\ y,\ z)$는 t에 관하여 구간 $[a,\ b]$에서 련속이다.

③ $G(t, y, z)$는 y, z에 관하여 립쉬츠련속이다.(m_2, m_3이 립쉬츠상수)

④ $F(t, y)$는 y에 관하여 립쉬츠련속이다.(립쉬츠상수 M)

이때 도식 ⑤의 풀이는 $N \to \infty$일 때 정확한 풀이 $y(t)$에로 수렴한다.

실례 다음의 비선형적분을 포함하는 분수계미적분방정식

$$ {}_0^cD_t^{2.5}y(t) = y(t) + {}_0^cD_t^{0.5}y(t) + 0.5\,{}_0^cD_t^{2}y(t) + t^2\int_0^t (t-s)^2 y^2(s)ds + f(t) $$

$$ f(t) = -1.5e^t - 1.5e^{-t} + t^3 - 2t^5/5 - t^2\mathrm{ch}(t)\mathrm{sh}(t) $$

$$ y(0) = 0 \ \ (0 \le t \le 1) $$

을 풀자. 이 방정식의 정확한 풀이는 $y(t) = e^t + e^{-t}$이다.

$(\alpha, \beta) = (-0.5, -0.5)$, $N = 5$일 때 우의 계산도식을 리용하여 얻은 근사풀이는

$$ y(t) = 2 + 0.000\ 165\ 679t + 0.998\ 364t^2 + 0.006\ 401\ 97t^3 + 0.071\ 944\ 8t^4 + 0.009\ 302\ 92t^5 $$

이다. N을 증가시키면서 오차를 구하면 오차가 $O(10^{-N})$정도라는것을 알수 있다.

참 고 문 헌

[1] E. A. Rawashdeh; Appl. Math. Comput., 176, 1, 2006.

[2] R. C. Mittal et al.; Int. J. Appl. Math. Mech., 4, 87, 2008.

[3] F. Dubois et al.; Numer. Algorithms, 34, 303, 2003.

[4] M. R. Eslahchi; J. Comput. Appl. Math., 257, 105, 2014.

[5] T. Xiaojun et al.; Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 30, 248, 2016.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

Spectral Collocation Method for Solving Multi-Order Fractional Differential Equation with Nonlinear Integral

Jo Son Hyang, Kang Yong Suk

In this paper, we present a method to approximately solve multi-order fractional differential equations with nonlinear integral using fractional pseudospectral integration matrices(FPIM). We construct a spectral collocation scheme, study the existence of the solution, prove the convergence and give an example to show the efficiency of this method.

Key word: fractional pseudospectral integration matrix

반주기경계조건을 가지는 한가지 형태의 다항분수계미분방정식의 풀이의 존재성

신영심, 최희철

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《과학과 기술이 매우 빨리 발전하고있는 오늘의 현실은 기초과학을 발전시킬것을 더욱 절실하게 요구하고있습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138페지)

론문에서는 반주기경계조건을 가진 한가지 형태의 다항분수계미분방정식의 풀이의 존재성을 연구하였다.

선행연구[4]에서는 최고계수가 1이하인 경우 다음의 다항분수계반주기경계값문제의 풀이의 존재성을 고찰하고 라쁠라스변환을 리용하여 동등한 적분방정식을 얻고 련속함수공간에서 풀이의 존재성을 증명하였다.

$$L(D)u(t)=f(t,\ u(t))\ \ (t\in[0,\ T],\ T>0)$$
$$L(D):=\lambda_n{}^cD_{0+}^{\alpha_n}+\lambda_{n-1}{}^cD_{0+}^{\alpha_{n-1}}+\cdots+\lambda_1{}^cD_{0+}^{\alpha_1}+\lambda_0{}^cD_{0+}^{\alpha_0}$$
$$\lambda_i\in\mathbf{R}\ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n),\ \lambda_n\neq 0,\ 0\le\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_{n-1}<\alpha_n<1$$

론문에서는 선행연구[4]에서 론의한 방정식의 도함수항의 결수들을 변결수로 확장하는 경우 라쁠라스변환을 쓸수 없기때문에 최고차항을 풀이로 가지는 동등한 적분방정식으로 넘기는 수법으로 풀이의 존재성을 론의하였다.

$$\begin{aligned}&L(D)u(t)=f(t,\ u(t))\ \ (t\in[0,\ T],\ T>0)\\&L(D):=\lambda_n(t){}^cD_{0+}^{\alpha_n}+\lambda_{n-1}(t){}^cD_{0+}^{\alpha_{n-1}}+\cdots+\lambda_1(t){}^cD_{0+}^{\alpha_1}+\lambda_0(t){}^cD_{0+}^{\alpha_0}\\&\lambda_i(t)\in C[0,\ T]\ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n),\ \lambda_n(t)\neq 0,\ 0\le\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_{n-1}<\alpha_n<1\\&u(0)+u(T)=0\end{aligned}\tag{1}$$

정의 1[1] $f:[0,\ T]\to\mathbf{R},\ \alpha>0$이라고 하자. f의 α계리만-류빌적분은 다음과 같이 정의된다.

$$I_{0+}^{\alpha}f(t):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s)ds$$

정의 2[2] f의 α계리만-류빌도함수는 다음과 같이 정의된다.

$$(D_{0+}^{\alpha}f)(t):=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{f(s)ds}{(t-s)^{\alpha}}\ \ (0<\alpha<1,\ t>0)$$

정의 3[3] $f:[0,\ T]\to\mathbf{R},\ \alpha\in(0,\ 1)$이라고 하자. f의 α계캐푸토도함수는 다음과 같이 정의된다.

$${}^cD_{0+}^{\alpha}f(t):=D_{0+}^{\alpha}(f(t)-f(0))$$

정의 4 ${}^cD_{0+}^{\alpha_n}u,\ u\in C[0,\ T]$인 u가 식 (1)을 만족시킨다면 u를 식 (1)의 풀이라고

부른다.

론의의 편리성을 위하여 다음의 표시를 도입하자.

$$\overline{\lambda}_i(t) := -\frac{\lambda_i(t)}{\lambda_n(t)},\ \beta_i := \alpha_n - \alpha_i\ \ (i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

정리 1 $f:[0,\ T]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 는 련속이라고 하자. $u(t)$ 가 식 (1)의 풀이이면 $y(t)={}^cD_{0+}^{\alpha_n}u(t)$ 는 $C[0,\ T]$ 에서 적분방정식

$$y(t) = \overline{\lambda}_{n-1}(t)I_{0+}^{\beta_{n-1}}y(t) + \cdots + \overline{\lambda}_1(t)I_{0+}^{\beta_1}y(t) + \overline{\lambda}_0(t)I_{0+}^{\beta_0}y(t) + f\left(t,\ I_{0+}^{\alpha_n}y(t) - \frac{1}{2}I_{0+}^{\alpha_n}y(t)|_{t=T}\right)\quad(2)$$

의 풀이이다. 거꾸로 $y(t)$ 가 적분방정식 (2)의 풀이이면 식

$$u(t) = I_{0+}^{\alpha_n}y(t) - \frac{1}{2}I_{0+}^{\alpha_n}y(t)|_{t=T}$$

로 결정되는 $u(t)$ 는 식 (1)의 풀이이다.

정리 1에 의하여 식 (1)의 풀이의 존재성은 결국 적분방정식 (2)의 풀이의 존재성에 귀착된다.

정리 2 다음의 가정을 하자.

① $f:[0,\ T]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 는 련속이다.

② $\exists L>0;\ \forall t\in[0,\ T]\ (\forall x_1,\ x_2\in\mathbf{R})$ 에 대하여 $|f(t,\ x_1)-f(t,\ x_2)|\le L\cdot|x_1-x_2|$ 가 성립한다.

③ $w := \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\|\overline{\lambda}_k\|\cdot T^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)} + L\cdot\frac{1.5T^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)} < 1$

그러면 식 (1)은 유일한 풀이를 가진다.

보조정리 1 X 를 바나흐공간, M 을 X 의 비지 않은 유계닫긴불룩모임, 연산자 $P,\ Q$ 들은 다음의 조건을 만족시킨다고 하자.

① $\forall x,\ y\in M;\ Px+Qy\in M$

② P 는 콤팍트, 련속연산자이다.

③ Q 는 축소연산자이다.

그러면 $z = Pz + Qz\ \ (z\in M)$ 가 존재한다.

정리 3 다음의 가정들이 성립될 때 식 (1)은 적어도 하나의 풀이를 가진다.

① $f:[0,\ T]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 는 첫째 변수에 관하여 련속인 유계함수이다.

② $\exists L>0;\ \forall t\in[0,\ T]\ (\forall x_1,\ x_2\in\mathbf{R})$ 에 대하여 $|f(t,\ x_1)-f(t,\ x_2)|\le L\cdot|x_1-x_2|$ 가 성립한다.

③ $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\|\overline{\lambda}_k\|\cdot T^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)} < 1,\ L\frac{1.5T^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)} < 1$

보조정리 2 X 를 바나흐공간, Ω 는 $0\in\Omega$ 인 X 의 유계열린모임, 연산자 $T:\overline{\Omega}\to X$ 가 다음의 조건을 만족시키는 완전련속연산자라고 하자.

$$\forall x\in\partial\Omega,\ \|Tx\|\le\|x\|$$

그러면 $\overline{\Omega}$ 에는 T 의 부동점이 존재한다.

정리 4 다음의 가정들이 성립될 때 식 (1)은 적어도 하나의 풀이를 가진다.

① $\exists L_x,\ L_t>0;\ \forall t_1,\ t_2\in[0,\ T]\ (\forall x_1,\ x_2\in\mathbf{R})$ 에 대하여

$$|f(t_1,\ x_1)-f(t_2,\ x_2)|\le L_t\cdot|t_1-t_2|+L_x\cdot|x_1-x_2|$$

가 성립한다.

② $\exists d,\ e>0;\ |f(t,\ x)|\le d|x|+e$

③ $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\|\overline{\lambda}_k\|\cdot T^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)}+\frac{1.5T^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)}d<1$

참 고 문 헌

[1] B. Ahmad et al.; Computers and Mathematics with Applications, 62, 1150, 2011.

[2] R. P. Agarwal et al.; Computers and Mathematics with Applications, 62, 1200, 2011.

[3] M. H. Aqlan et al.; Open Math., 14, 723, 2016.

[4] S. Choudhary et al.; Fract. Calc. Appl. Anal., 17, 2, 333, 2014.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

Existence of Solutions for a Multi-Term Fractional Equation with Anti-Periodic Boundary Condition

Sin Yong Sim, Choe Hui Chol

In this paper, we consider the existence of solutions for multi-term fractional differential equations with an anti-periodic boundary condition.

Key words: multi-term fractional equation, anti-periodic boundary value problem

김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

작용－각변수로 표시되지 않은 해밀턴벡토르마당에 관한 KAM정리의 성립조건결수의 정량적평가

정우환, 신경령

론문에서는 해밀턴벡토르마당에 대한 불변고리의 존재성과 국부적유일성을 연구하였다. 해밀턴계에서의 불변고리들의 존재성은 여러 자연과학과 기술공학분야들에서 자주 사용된다.[1, 3, 9, 14, 15, 18, 19] 선행연구[2, 16]의 고전적결과이후 선행연구[4, 5, 8, 10－12]을 비롯하여 여러 형태의 섭동형KAM정리들이 제시되였다. 많은 실천적인 응용들에서는 거의 적분가능한 계가 아닌 경우에 오차가 충분히 작은 근사적인 불변고리근방에서 진짜 불변고리를 찾아야 하는 경우가 제기된다.[17]

그리하여 선행연구[13, 17]에서는 적분가능계의 섭동계로 표시되지 않는 해밀턴계에 대한 KAM정리를 증명하였다. 이상의 KAM정리들에서는 KAM정리성립조건결수가 충분히 작으면 불변고리가 존재한다(또는 불변고리가 국부적으로 유일)는 방식으로 정식화되여있다. 그러나 구체적인 물리적계들에 KAM정리를 적용하려고 할 때 정리성립조건결수가 얼마보다 작으면 불변고리가 존재하는가와 같은 정량적평가가 주어져야 한다.

선행연구[6]에서는 해밀턴함수가

$$H(x,\ y,\ t) = y^2/2 + \varepsilon[\cos x + \cos(x-t)]$$

인 해밀턴계를 연구하고 섭동파라메터가 $0 < \varepsilon \le 0.025\ 375$ 이면 불변고리가 존재한다는것을 밝혔다. 한편 선행연구[7]에서는 KAM알고리듬을 태양－목성－위성계에 적용하여 섭동파라메터가 $0 < \varepsilon \le 0.001$ 을 만족시키면 불변고리가 존재한다는것을 밝혔다.

론문에서는 일반적으로는 적분가능계의 섭동으로 표시되지 않고 작용－각변수로도 표시되지 않은 해석적인 해밀턴벡토르마당에 대한 KAM정리의 성립조건결수에 대한 정량적평가를 진행하였다.

정의 1 $n \in \mathbf{N},\ \rho > 0$ 이라고 가정한다. 상다양체 $\boldsymbol{T}^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ 을 n 차원고리라고 부른다. 또한 $U_\rho = \{\theta \in \mathbf{C}^n \mid |\operatorname{Im}\theta| \le \rho\}$ 로 놓는다.

정의 2[17] $\boldsymbol{v} = (v_1,\ \cdots,\ v_n) \in \mathbf{R}^n$ 이라고 하자. 어떤 $\gamma > 0,\ \sigma > 0$ 에 대하여 조건

$$|\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}| \ge \frac{\gamma}{\|\boldsymbol{k}\|^\sigma}\ \ (\forall \boldsymbol{k} = (k_1,\ \cdots,\ k_n) \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\})$$

(여기서 $\|\boldsymbol{k}\| := |k_1| + \cdots + |k_n|$)를 만족시킬 때 벡토르 $\boldsymbol{v}$ 는 디오판투스조건을 만족시킨다고 말한다. 웃조건을 만족시키는 벡토르 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$ 들전체의 모임을 $D_n(\gamma,\ \sigma)$ 로 표시한다.

정의 3 련속함수 $\xi : \boldsymbol{T}^n \to \mathbf{R}$ 에 대하여 적분 $\int_{\boldsymbol{T}^n} \xi(\theta)d\theta$ 를 ξ 의 평균이라고 부르고 $<\xi>$ 로 표시한다.

정의 4 $X \subset \mathbf{C}^n$ 을 $X \subset \overline{\operatorname{int} X}$ 를 만족시키는 모임이라고 한다. 모임 X 에서 련속이고 매 변수에 관하여 1－주기적이며 $\operatorname{int} X$ 에서 실해석적인 넘기기 $K : X \to \mathbf{R}^{2n}$ 들전체의 모

임을 $\mathcal{P}(X, \mathbf{R}^{2n})$과 같이 표시한다. $\mathcal{P}(X, \mathbf{R}^{2n})$은 노름

$$\|K\| = \sup_{z\in X} |K(\theta)| = \sup_{z\in X} \max_{1\le j\le 2n} |K_j(z)|$$

에 관하여 바나흐공간이 된다. $Y \subset \mathbf{R}^{2n}$일 때 $\mathcal{P}(X, Y) = \{K \in \mathcal{P}(X, \mathbf{R}^{2n}) \mid K(X) \subset Y\}$라고 놓는다.

정의 5 [2] $\boldsymbol{U}^{2n}$로 $\mathbf{R}^{2n}$의 열린모임 또는 어떤 열린모임 $U \subset \mathbf{R}^n$에 관하여 $\boldsymbol{U}^{2n} = \boldsymbol{T}^n \times U$로 주어지는 $2n$차원다양체를 표시한다. n차단위행렬을 I_n으로 표시하고 $2n$차행렬 J를

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

으로 정의한다. 실해석적함수 $H : \boldsymbol{U}^{2n} \to \mathbf{R}$가 주어졌다고 하자. 이때

$$X_H(z) = J\nabla H(z) \ \ (z \in \boldsymbol{U}^{2n})$$

에 의하여 정의되는 $\boldsymbol{U}^{2n}$우의 벡토르마당 $X_H : \boldsymbol{U}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$을 해밀턴함수 H에 관한 해밀턴벡토르마당이라고 부르고 상미분방정식

$$\frac{dz}{dt} = X_H(z) = J\nabla H(z) \tag{1}$$

를 해밀턴함수가 H인 해밀턴상미분방정식이라고 부른다. $\varphi_t(x_0, y_0)$ $(t \in \mathbf{R})$으로 초기조건 $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$을 만족시키는 상미분방정식 (1)의 풀이를 표시하자.

모임 $\mathcal{T}^n \subset \boldsymbol{U}^{2n}$이 n차원고리 $\boldsymbol{T}^n$과 미분동형이고 $\varphi_t(\mathcal{T}^n) = \mathcal{T}^n$ $(\forall t \in \mathbf{R})$을 만족시킬 때 모임 $\mathcal{T}^n$을 상미분방정식 (1)의 불변고리라고 부른다.

정의 6 [17] $\sigma > n-1$이고 $\upsilon \in D_n(\gamma, \sigma)$라고 한다. $K \in \mathcal{P}(U_\rho, \boldsymbol{U}^{2n})$에 대하여

$$\partial_\nu K(\theta) := DK(\theta)\nu$$

라고 놓는다. 넘기기 $F : \mathcal{P}(U_\rho, \boldsymbol{U}^{2n}) \to \mathcal{P}(U_\rho, \mathbf{R}^{2n})$을

$$F(K)(\theta) = J\,\nabla H(K(\theta)) - \partial_\nu K(\theta) \ \ (\theta \in U_\rho)$$

에 의하여 정의한다.

해밀턴상미분방정식 (1)을 고찰하기 위하여 1계편미분방정식

$$F(K) = J\nabla H \circ K - \partial_\nu K = 0 \tag{2}$$

을 생각한다. 식 (2)의 실해석적인 단일넣기가 되는 풀이 $K \in \mathcal{P}(U_\rho, \boldsymbol{U}^{2n})$에 대하여 모임 $K(\boldsymbol{T}^n)$은 식 (1)의 불변고리가 된다. 그리하여 식 (2)를 해밀턴불변고리방정식이라고 부른다.

정의 7 $K \in \mathcal{P}(U_\rho, \boldsymbol{U}^{2n})$이 아래의 두 조건을 만족시킨다고 하자.

① 임의의 $\theta \in U_\rho$에 대하여 $Y(\theta) = K(\theta)^{\mathrm{T}} K(\theta)$는 불퇴화이다. $N(\theta) = Y(\theta)^{-1}$이라고 놓는다.

② $A(\theta) = \begin{pmatrix} D_x \nabla_y H(K(\theta)) & D_y \nabla_y H(K(\theta)) \\ -D_x \nabla_x H(K(\theta)) & -D_y \nabla_x H(K(\theta)) \end{pmatrix}$라고 놓을 때 행렬함수

$$S^0(\theta) = N(\theta) DK(\theta)^{\mathrm{T}} [A(\theta) J - JA(\theta)] DK(\theta) N(\theta)$$

의 평균 $< S^0 >$은 불퇴화이다. 이때 K는 불퇴화조건을 만족시킨다고 말한다. 불퇴화조건을 만족시키는 넘기기 $K \in \mathcal{P}(U_\rho, \boldsymbol{U}^{2n})$들전체의 모임을 $\mathcal{NP}(\rho)$와 같이 표시한다.

정의 8[17] 모임 $K \in \mathcal{NP}(\rho)$ 에 속하는 넘기기 $K: U_\rho \to \boldsymbol{U}^{2n}$ 을 식 (2)의 근사풀이라고 부른다. 이때 넘기기 $e(\theta) = J\nabla H(K(\theta)) - \partial_\omega K(\theta)$ $(\theta \in U_\rho)$ 를 식 (2)의 근사풀이 K 의 오차라고 부른다. $\|e\|_\rho$ 를 식 (2)의 근사풀이 K 의 오차크기라고 부른다.

정의 9 넘기기 $R_\tau: U_\rho \subset \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ 을 $R_\tau(\theta) = \theta + \tau$ 로 정의한다.

정의 10 세변수다항식 $p(d,\ \nu,\ h)$ 와 4변수다항식 $\xi(d,\ \nu,\ h,\ s)$, $\eta(d,\ \nu,\ h,\ s)$ 및 5변수다항식 $\lambda(d,\ \nu,\ s,\ h,\ H)$ 를 아래의 식으로 정의한다.

$$p(d,\ \nu,\ h) := (d+1)^2(\nu+1)^3(4nh+1)$$

$$\xi(d,\ \nu,\ h,\ s) =$$
$$= (d+1)(\nu+1)\cdot(\mu+1)(2n(\mu+1)d+n)p[(2n(\mu+1)d+n)+s(2n(\mu+1)d+n)p+1]$$

$$\eta(d,\ \nu,\ h,\ s) = 14(d+1)(\nu+1)(2n(\mu+1)d+n)p(\mu+1)(2n(\mu+1)d+n)p\cdot$$
$$\cdot[(2n(\mu+1)d+n)+s(2n(\mu+1)d+n)p+1]$$

$$\lambda(d,\ \nu,\ s,\ h,\ H) = 68(s+1)^2 p(4\nu^2+2H+1)(2nd+n^2)(\eta+H\xi^2)$$

정리 1 $\sigma > n-1,\ \nu \in D_n(\gamma,\ \sigma),\ 0 < \rho_0 \le 12,\ \delta_0 = \rho_0/12$ 이라고 한다. $H: \boldsymbol{U}^{2n} \to \mathbf{R}$ 를 실해석적함수라고 하고 어떤 $r > 0$ 이 있어서 $H(z)$ 가 모임

$$\mathcal{B}_r = \left\{ z \in \mathbf{C}^{2n} \,\middle|\, \inf_{|\mathrm{Im}\,\theta| < \rho_0} |z - K_0(\theta)| < r \right\}$$

에 해석연장된다고 가정한다. 그리고 $K_0 \in \mathcal{NP}(\rho_0)$ 이라고 하고

$$e_0(\theta) = J\nabla H(K_0(\theta)) - \partial_\omega K_0(\theta)\ \ (\theta \in U_\rho)$$

라고 놓는다. 여기서

$$d_0 = \|DK_0\|_{\rho_0},\ \nu_0 = \|N_0\|_{\rho_0},\ \ s_0 = \|\langle S_0\rangle^{-1}\|,\ \beta = \gamma^2\delta_0^{2\sigma-1}2^{-(4\sigma+1)}(1+2^{4\sigma-1})$$

$$c = \lambda(d_0+\beta,\ \nu_0+\beta,\ \ s_0+\beta,\ |H|_{C^2,\ \mathcal{B}_r},\ \ |H|_{C^3,\ \mathcal{B}_r}),\ C = (1+2^{4\sigma})c$$

라고 놓는다. 이때

$$C\gamma^{-4}\delta_0^{-4\sigma}\|e_0\|_{\rho_0} \le 1/2,\ C\gamma^{-2}\delta_0^{-2\sigma}\|e_0\|_{\rho_0} < r$$

를 만족시키면 식 (2)의 풀이 $K_\infty \in \mathcal{NP}(\rho/2)$ 가 존재하고

$$\|K_\infty - K_0\|_{\rho_\infty} \le c\gamma^{-2}\delta_0^{-2\sigma}\varepsilon_0\left(1+\kappa\frac{2^{4\sigma}}{2^{2\sigma}-1}\right) < r$$

를 만족시킨다.

정리 2 $\sigma > n-1$, $\nu \in D_n(\gamma,\ \sigma)$ 및 $\delta = \rho/8$ 라고 가정한다.

$$c^0 = (1+|\langle S(\theta)\rangle^{-1}|)(1+2n\|DK\|_\rho^2\|N\|_\rho^2)^2(\|H\|_{C^1,\mathcal{B}_r}+1)^2(1+\gamma\delta^\sigma)^2(1+\mu)^2$$

및

$$c^* = 2^{2\sigma+1}n\cdot(1+\|DK_2\|_\rho)(1+\|N_2\|_\rho)(2n\rho^{-1}+3\|D^2K_1\|_0)(1+\|N_2\|_\rho)c^0$$

이라고 놓는다. 이때 $K_1,\ K_2 \in \mathcal{NP}(\rho)$ 들이 $K_1(U_\rho) \subset \mathcal{B}_r,\ K_2(U_\rho) \subset \mathcal{B}_r$ 를 만족시키는 식 (2)의 풀이이고

$$\gamma^{-2}\delta^{-2\sigma}c^*\|K_1 - K_2\|_\rho < 1$$

을 만족시키면 어떤

$$\tau \in \Theta := \{\tau \in \mathbf{R}^n \mid |\tau| < \| K_1 - K_2 \|_\rho\}$$

가 있어서 $K_1 \circ R_\tau = K_2$ 가 성립한다.

참 고 문 헌

[1] K. Abe; http://math.shinshu－u.ac.jp/~kabe/, 2009.
[2] V. I. Arnold; Usp. Mat. Nauk, 18, 5, 13, 1963.
[3] V. I. Arnold; Russian Math. Surveys, 18, 86, 1963.
[4] G. Benettin et al.; Nuovo. Cimento, 79, 2, 201, 1984.
[5] J. Xu et al.; Mathematische Zeitschrift, 226, 375, 1997.
[6] A. Celletti et al.; Nonlinearity, 13, 2, 397, 2000.
[7] A. Celletti et al.; Z. Angew. Math. Phys., 57, 33, 2006.
[8] L. H. Eliasson; Math. Phys. Electronic J., 2, 4, 1996.
[9] J. Féjoz; Ergod Th. Dyn. Sys., 24, 1, 2004.
[10] H. Rüssmann; Number Theory and Dynamical Systems, Cambridge Univ. Press, 5～18, 1989.
[11] J. Féjoz; arXiv:1102.0923v2 [math.DS], 2011.
[12] G. Gallavotti; NATO ASI Series C: Math. Phys. Sci., 533, 62, 1999.
[13] A. González et al.; J. Differential Equations, 245, 1243, 2008.
[14] R. H. G. Helleman et al.; Lecture Notes in Physics, 247, Springer, 64～76, 1986.
[15] A. N. Kolmogorov; Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 98, 4, 527, 1954.
[16] R. Llave et al.; Nonlinearity, 18, 855, 2005.
[17] S. K. Wang et al.; http://www.shaneross.com/books/space, 2006.
[18] N. Nakajima et al.; J. Plasma Fusion Res., 88, 3, 153, 2012.
[19] J. Pöschel; Proc. Symp. Pure. Math., 69, 707, 2001.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

Quantitative Estimation of the Realization Condition Coefficients in KAM Theorem for Hamiltonian Vector Fields without Action-Angle Variables

Jong U Hwan, Sin Kyong Ryong

We give a quantitative estimation of the realization condition coefficients of KAM theorem for Hamiltonian vector fields without action-angle variables.

Key words: KAM theorem, Hamiltonian system

평등계획을 리용한 한가지 2차3수준유효초포화계획구성

김철호, 김철옥

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《현시대는 과학기술의 시대이며 과학기술의 발전수준은 나라의 종합적국력과 지위를 규정하는 징표로 됩니다.》

선행연구[2]에서는 완전2차회귀모형에 대한 한가지 3수준계획으로서 합리적인 초포화계획의 구성법을, 선행연구[3]에서는 불완전2차회귀모형에 대한 합리적인 초포화계획으로서 2수준홀더브계획의 구성법들을, 선행연구[4]에서는 같은 모형에서 주효과와 얽힘효과를 추정하기 위한 합리적인 초포화계획구성법들을, 선행연구[1]에서는 평등계획에 대한 행치환적을 도입하여 1차회귀모형에 대한 여러수준최량초포화계획구성법을 연구하였다.

론문에서는 2차유효초포화계획에 대한 개념을 제기하고 평등계획을 리용하여 2차3수준유효초포화계획의 구성법을 내놓고 그 성질을 연구하였다.

완전2차회귀모형

$$y=\beta_0+\sum_{i=1'}^{k}\beta_t x_t+\sum_{i=1}^{k}\beta_{ii}x_i^2+\sum_{j<j}^{k}\beta_{ij}x_i x_j+\varepsilon\ ,\ \ \varepsilon : N(0,\ \ \sigma^2) \tag{1}$$

에 대하여 계획구역 $\Lambda=\{(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_k)\,|\,x_i\in\{0,+1,-1\}\ (i=1,\ 2,\cdots,k)\}$ 에서의 합리적인 초포화계획을 구성하는 방법을 보기로 하자.

이제 다음과 같은 계획을 모형 (1)에 대한 계획(행렬)이라고 하자.

$$D(N)=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1}\\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{1N} & x_{2N} & \cdots & x_{kN}\end{pmatrix} \tag{2}$$

이때 완전2차회귀모형에 대한 미지파라메터개수는 $m=(k+1)(k+2)/2$ 이다.

인자 $x_{i\alpha}$ 들이 가지는 동일한 수준수를 p 라고 하면 2차초포화계획을 다음과 같이 정의한다.

정의 1 계획행렬 (2)를 완전2차회귀모형 (1)에 대한 계획행렬이라고 할 때 이 계획을 $(p-1)m<N$ 이면 2차비포화계획, $(p-1)m=N$ 이면 2차포화계획, $(p-1)m>N$ 이면 2차초포화계획이라고 부른다.

계획행렬의 합리성을 위한 유효성기준에 대하여 보기로 하자.

모형 (1)을 다음과 같이 변경시킬수 있다.

$$y=\sum_{i=1}^{k}\beta_t x_t+\beta_0+\sum_{i=1}^{k}\beta_{ii}x_i^2+\sum_{i>j}^{k}\beta_{ij}x_i x_j+\varepsilon \tag{3}$$

모형 (3)에 대한 독립변수행렬은 $\widetilde{D}=(D(N):D_1)$ 로 된다. 여기서 $D(N)$ 은 $(N\times k)$ 형계획행렬, D_1 은 상수항, 2차항, 얽힘항에 대응되는 $(N\times(1+k(k+1)/2))$ 형행렬이다.

모형 (3)을 행렬모형으로 바꾸어쓰면

$$y = D\theta_1 + D_1\theta_2 + \varepsilon \tag{4}$$

으로 된다. 여기서 $\theta_1 = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k)^{\mathrm{T}}$, $\theta_2 = (1, \beta_{11}, \beta_{22}, \cdots, \beta_{kk}, \beta_{12}, \beta_{13}, \cdots, \beta_{k-1\,k})^{\mathrm{T}}$ 이다.

1차주효과모형 $y = D\theta_1 + \varepsilon$ 에서 θ_1 의 최소두제곱추정량을 구하면 $\hat{\theta}_1 = (D^{\mathrm{T}}D)^{-1}D^{\mathrm{T}}y$ 이며 모형 (4)를 리용하면 $E\hat{\theta}_1 = \theta_1 + A\theta_2$ 로 된다. 여기서 $A = (D^{\mathrm{T}}D)^{-1}D^{\mathrm{T}}D_1$ 이다.

이때 θ_1 에 대한 불편추정량을 구하자면 $A = 0$ 이여야 한다.

$A = 0$ 이자면 계획행렬 D 와 D_1 에 대하여 $D^{\mathrm{T}}D_1 = 0$ 이면 충분하다.

한편 1차주효과추정에서 정확도를 높이자면 계획행렬 D 에 관하여 $D-$최량성기준으로서 $\det(D_0^{\mathrm{T}}D_0)$ 을 최대로 하여야 한다. 여기서 D_0 은 상수항을 포함한 $(N \times (1+k))$ 형행렬로서 $D_0 = (1 : D)$ $(1 = (1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}})$ 이다.

이로부터 2차유효초포화계획의 개념을 다음과 같이 정의한다.

정의 2 완전2차회귀모형 (1)에 대한 계획 (2)에 대하여 다음의 조건들을 만족시키는 계획을 2차유효초포화계획이라고 부른다.

① $A = 0$

② $D-$최량계획 D_{0*} 에 관하여 $[\det(D_0^{\mathrm{T}}D_0)/\det(D_{0*}^{\mathrm{T}}D_{0*})]^{1/p} \Rightarrow \max$ $(p = k+1)$ 이다.

정의 3[5] 회귀모형

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_s x_s \tag{5}$$

에 대하여 계획구역 D^s 에서 n 개의 점으로 이루어진 실험계획

$$X(N) = (x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \cdots, x_{ks}) \ (k = 1, 2, \cdots, N))$$

의 최대허용편차 $D(p_n) = \max\limits_{(x_1, x_2, \cdots, x_s) \in D^s} |F_n(x_1, x_2, \cdots, x_s) - F(x_1, x_2, \cdots, x_s)|$ 가 최소로 될 때 계획 $X(N)$ 을 계획구역 D^s 에서 회귀모형 (5)에 대한 평등계획이라고 부른다. 여기서

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_s) = \prod_{i=1}^{s} x_i, \ F_n(x) = F_n(x_1, x_2, \cdots, x_s) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I\{x_{k1} < x_1, \cdots, x_{ks} < x_s\}$$

정의 4[5] n 수준 U 형계획 $U_n(n^m)$ 들중에서 다음의 기준값이 최소로 되는 계획을 U 평등계획이라고 부른다.

$$CD_2(P_n) = \left[\left(\frac{13}{12}\right)^2 - \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{s}\left(1 + \frac{1}{2}\left|x_{ki} - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}\left|x_{ki} - \frac{1}{2}\right|^2\right) + \frac{1}{n^2}\sum_{k,\,l=1}^{n}\prod_{i=1}^{s}\left(1 + \frac{1}{2}\left|x_{ki} - \frac{1}{2}\right| + \frac{1}{2}\left|x_{li} - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}|x_{ki} - x_{li}|\right)\right]^{1/2}$$

정의 5[4] 행렬 A 를 매 렬이 치환렬로 구성된 $(n \times m)$ 형행렬, 행렬 B 를 $(n \times p)$ 형행렬이라고 할 때 다음과 같은 넘기기를 생각하자.

① 행렬의 첫렬에 A 의 첫렬의 행순서대로 B 의 매 행들을 치환한 $(n \times p)$ 형행렬을 놓는다.

② 행렬의 둘째 렬에는 A 의 둘째 렬의 행순서대로 B 의 매 행들을 치환한 $(n \times p)$ 형행렬을 놓는다.

③ 우의 과정을 m 째 렬까지 반복하여 $(n \times mp)$ 형행렬 C 를 얻는다. 이런 넘기기를 A 의 렬에 따르는 A 와 B 의 행치환적이라고 부르고 $C = A \oplus B$ 로 표시한다.

2차3수준초포화계획을 다음과 같이 구성한다.

3수준직교계획 $X_n(3^s)$ 과 U 평등계획 $U_n(n^2)$ 에 의한 행치환적을 실시한다. 즉

$$X_n(3^s) \oplus U(n^2) = (X(3^s) : \tilde{X}(3^s))$$

라고 한다.

2차3수준초포화계획 $D(N:k)$ 는

$$D(N:k) = \begin{pmatrix} X(3^s) & : \tilde{X}(3^s) \\ -X(3^s) & : \tilde{X}(3^s) \\ 0 & : \quad 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

이다. 여기서 $\tilde{X}(3^s)$ 은 U 평등계획에 의하여 $X(3^s)$ 이 변형된 행렬이며 구성된 계획행렬은 $N=2n,\ k=2s$ 인 $(N \times k)$ 형행렬이고 $0=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0) \in \mathbf{R}^s$ 이다.

다음으로 계획 $D(N:k)$ 의 성질에 대하여 보자.

정리 1 2차3수준초포화계획 (6)은 직교계획이다.

정리 2 2차3수준초포화계획 (6)은 1차주효과추정에 관하여 불편인 초포화계획이다. 즉 $D^{\mathrm{T}}D_1 = 0$ 인 초포화계획이다.

증명 실험점개수가 $N=2n=2\times 3^l$ 이고 $s=(3^l-1)/2$ 이므로 렬의 개수(인자의 개수)는 $k=2s=3^l-1$ 이다. 따라서 총 파라메터개수가 $m=(k+1)(k+2)/2=3^l(3^l+1)/2$ 이므로

$$2m-N=2\times 3^l \times (3^l+1)/2 - 2\times 3^l = 3^l(3^l-1) > 0$$

이다. 한편 정리 1에서와 마찬가지로 초기계획 $X_n(3^s)$ 의 직교성과 U 평등계획의 성질, 행치환적의 성질에 의하여 1차주효과들은 2차주효과들, 얽힘효과들과 독립적으로 추정된다. 즉 $\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} x_{i\alpha}^2 x_{j\alpha} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} x_{i\alpha} x_{j\alpha}^2 = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} x_{i\alpha} x_{j\alpha} x_{l\alpha} = 0\ \ (i,\ j,\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ 2s\ \ (i \ne j \ne l))$ 이다.(증명끝)

구성방법에 의하여 얻어지는 대표적인 2차유효초포화계획들은 다음과 같다.

$$k=4 \text{ 인 경우 } X_6(3^2) = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ 0 & -1 \\ +1 & 0 \\ +1 & 0 \\ -1 & +1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow D(13:4) = \begin{pmatrix} X_6(3^2) & : & \tilde{X}_6(3^2) \\ -X_6(3^2) & : & \tilde{X}_6(3^2) \\ 0 & : & 0 \end{pmatrix}$$

$$k=5,\ 6,\ 7,\ 8 \text{ 인 경우 } X_9(3^4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & +1 & +1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & 0 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & 0 \\ +1 & -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D(19:8) = \begin{pmatrix} X_9(3^4) & : & \tilde{X}_9(3^4) \\ -X_9(3^4) & : & \tilde{X}_9(3^4) \\ 0 & : & 0 \end{pmatrix}$$

$k=9, \cdots, 14$ 인 경우 초기계획으로서 직교표 $L_{18}(2^1\times 3^7)$ 에서 첫렬을 없애고 $0\to 0$, $1\to +1$, $2\to -1$ 로 변형한 $X_{18}(3^7)$ 을 선택하고 구성방법에 따라 다음과 같이 구성한다.

$$D(37:14)=\begin{pmatrix} X_{18}(3^7) & : & \tilde{X}_{18}(3^7) \\ -X_{18}(3^7) & : & \tilde{X}_{18}(3^7) \\ 0 & : & 0 \end{pmatrix}$$

2차3수준초포화계획 (6)에 대한 $D-$최량성의 의미로서의 유효성평가는 1차직교계획에 령점을 포함한 $D-$최량계획들의 정보행렬식들을 리용하여 실험점개수와 파라메터개수에 따르는 $[\det(D_0^{\mathrm{T}}D_0)/\det(D_{0*}^{\mathrm{T}}D_{0*})]^{1/p}$ 을 계산하는 방법으로 진행하였다.

계산결과는 표와 같다.

표. 계획 $D(N:k)$ 의 유효성평가

N	k	m	$D(N:k)$	$\left[\dfrac{\det(D_0^{\mathrm{T}}D_0)}{\det(D_{0*}^{\mathrm{T}}D_{0*})}\right]^{1/p}$ (%)
13	4	15	$D(13:4)$	72.58
19	5	21	$D(19:5)$	71.70
	6	28	$D(19:6)$	70.90
	7	36	$D(19:7)$	70.43
	8	45	$D(19:8)$	70.01
37	9	55	$D(37:9)$	69.73
	10	66	$D(37:10)$	69.45
	11	78	$D(37:11)$	69.29
	12	91	$D(37:12)$	69.09
	13	105	$D(37:13)$	68.96
	14	120	$D(37:14)$	68.90

표에서 보는바와 같이 계획 $D(N:k)$ 는 유효성기준을 만족시킨다.

참 고 문 헌

[1] 황철규 등; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 6, 26, 주체105(2016).

[2] J. Bradley et al.; Technometrics, 43, 1, 2011.

[3] E. Anna et al.; Technometrics, 59, 48, 2017.

[4] E. Candes et al.; Ann. Statist., 35, 2313, 2007.

[5] C. Kashinath et al.; Statist. Sinica, 23, 1, 2015.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

Construction of a Second-Order Three-Level Efficient Supersaturated Design using Uniform Design

Kim Chol Ho, Kim Chol Ok

We suggest the concept of second-order efficient supersaturated design and study the construction method and the property of second-order three-level efficient supersaturated design using uniform design.

Key word: second-order efficient supersaturated design

개선된 표본렬을 리용하여 3차원영상생성에서 화질을 높이기 위한 한가지 방법

한성, 리정로

렌더링에서는 $L(x \to V) = L_e(x \to V) + \int_{\Omega_x} f_r(x,\ L \to V) L(x \leftarrow L) \cos(N,\ L) d\omega_L$ 을 풀어야 하는데 이것의 해석적계산은 불가능하므로 몽떼－까를로적분을 써서 계산한다.

$$L(x \to V) = L_e(x \to V) + \frac{1}{n}\sum_i \frac{f_r(x,\ L \to V) L(x \leftarrow L) \cos(N,\ L)}{p(\omega_i)}$$

여기서 $L_e(x \to V)$ 는 면의 x 점에서 V 방향으로 방출되는 빛흐름을 나타내고 $L_r(x \to V)$ 는 면의 x 점에서 V 방향으로 반사되는 빛흐름을 나타낸다. 총적으로 $L(x \to V)$ 는 V 방향으로 향하는 빛흐름을 나타낸다. $f_r(x,\ L \to V)$ 는 쌍방향반사률함수(BRDF)라고 부르며 $f_r(x,\ L \to V) = \dfrac{dL(x \to V)}{dE(x \leftarrow L)} = \dfrac{dL(x \to V)}{L(x \leftarrow L) \cos(N,\ L) d\omega_L}$ 와 같이 정의된다. $E(x \leftarrow L)$ 은 x 점에서 L 방향에서 입사하는 빛에 대한 비침도이다.

BRDF는 재질마다 고유한 척도로서 얻어낸 영상이 현실과 류사하도록 조절통제하는 수단이다. 이 함수를 실제한 재질과 가깝게 정할수록 질이 높아지게 된다.

3차원렌더링방정식의 수치풀이를 구하는데서 표본렬을 잘 선택하는것이 중요한 문제로 나선다. 표본렬을 특징짓는 중요한 척도로서 불일치량[1]이 있다. 불일치량은 n 차원공간의 표본렬의 질을 평가하는데 리용된다. 불일치량은 한마디로 말하여 n 차원공간의 모임 $[0,\ 1]^n$ 에 표본렬이 분포되여있을 때 그것의 임의의 구역에 들어있는 표본의 수를 표본전부의 개수로 나눈 값과 그 구역의 측도와의 차이의 상한을 말한다.

점모임의 불일치량을 계산하기 위하여 그것의 부분모임으로서 모임 B를 실례로 $B = \{[0,\ \upsilon_1] \times [0,\ \upsilon_2] \times \cdots \times [0,\ \upsilon_n]\}$, $0 \le \upsilon_i < 1$과 같이 선택할수 있다.

표본점들의 렬 $P = x_1,\ x_2, \cdots,\ x_N$ 이 주어졌을 때 모임 B 에 대한 P 의 불일치량은 $D_N(B,\ P) = \sup_{b \in B} |\#\{x_i \in b\}/N - V(b)|$ 와 같다. 여기서 $\#\{x_i \in b\}$ 는 b 에 들어있는 점들의 수이고 $V(b)$ 는 b 의 체적이다. 모임 B 가 하나의 정점이 원점에 있는 통들의 모임일 때의 불일치량을 특별히 별불일치량이라고 부르고 $D_N^*(P)$ 로 표시한다.

특별한 점모임에 대하여 불일치량은 해석적으로 계산할수 있다.

실례로 $x_i = i/N$ 일 때 불일치량은 $D_N^*(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = 1/N$ 이다. 이 렬의 별불일치량은 그 모임을 약간 변경시키면 개선될수 있다. 다시말하여 $x_i = (i - 1/2)/N$ 로 놓으면 별불일치량은 $D_N^*(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = 1/(2N)$ 로 된다.

1차원에서 표본렬의 불일치량은 $D_N^*(x_i) = \dfrac{1}{2N} + \max_{1 \le i \le N} \left| x_i - \dfrac{2i-1}{2N} \right|$ 과 같은 성질을 가진다. 이로부터 $x_i = (i - 1/2)/N$ 은 1차원에서 불일치량이 가장 작은 렬로 된다.

일반적으로 1차원에서 표본렬의 불일치량을 계산하고 경계를 구하는것은 2차원에서보다 훨씬 쉽다. 보다 복잡하게 구성된 렬과 고차원에서의 표본렬의 불일치량 그리고 통이 아닌 보다 불규칙적인 모임에 대한 불일치량은 모임을 많이 구성하여 수치적으로 추정하고 불일치량을 계산하여 얻어진 값들가운데서 최대값으로 선택한다.

불일치량만으로서는 표본렬의 좋고 나쁜 정도를 정확히 규정할수 없다. 어떤 LDS렬(불일치량이 작은 렬)에서는 표본들이 너무 가까이 배치되여있게 된다. 표본들이 가까우면 가까울수록 표본화하려고 하는 함수에 대한 새로운 정보를 얻지 못하게 된다. 표본들사이의 거리가 크면 클수록 표본렬의 질이 높아지게 된다. 그러므로 표본점들사이의 최소거리도 표본렬의 질을 특징짓는 쓸모있는 계량으로 된다.

현재 불일치량이 작으면서도 최소거리가 큰 표본렬을 생성하기 위한 연구가 활기있게 진행되고있으며 대표적인 표본렬로서는 쏘볼렬[1]을 들수 있다.

선행연구[1, 2]에서는 3차원영상생성에서 리용되는 쏘볼렬을 얻어내기 위한 방법과 표본렬을 얻어내는데서 효과성을 높이기 위하여 특별히 잘 설계된 생성행렬을 만들고 그것에 기초하여 표본렬을 얻어내기 위한 방법을 제안하였다.

쏘볼렬을 생성하는 알고리듬은 다음과 같다.

① 렌더링하려고 하는 화소에서 리용하려는 첨수번호를 구한다.

② 얻어내려고 하는 표본값의 차원을 선택한다.

③ 표본값을 얻어낸다.

```
Float SobolSampleFloat(int64_t a, int dimension)
   {
        uint32_t v = 0;
        for (int i = dimension * SobolMatrixSize; a!= 0; a >>= 1, i++)
        if (a & 1) v ^= SobolMatrices32[i];
        return v * 2.3283064365386963e-10f /* 1/2^32 */
   }
```

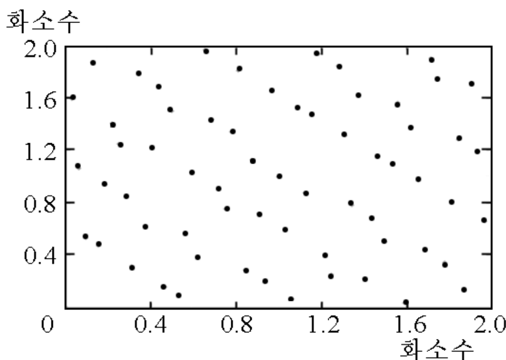


그림. 2×2 pixel화상의 매 화소당 16개의 쏘볼렬로 얻어낸 표본렬

선행연구[2]에서 제기한 방법으로 얻어낸 표본렬은 표본의 개수가 작을 때에 규칙적인 구조가 나타나게 되는 결함을 가지고있다.

그림에서는 2×2 pixel화상의 매 화소당 16개의 쏘볼렬로 얻어낸 표본렬을 보여준다.

이러한 표본렬로는 대상을 원만히 표본화할수 없으며 이것은 장면에서 바둑판무늬를 산생시키는 요인으로 되고있다. 바둑판무늬는 화상의 질을 떨구는 요인의 하나로 되고있다.

론문에서는 이 문제를 해결하기 위하여 얻어낸 표본렬에 우연적인 치환을 적용함으로써 구조적위험성을 극복하고 렌더링을 효과적으로 진행할수 있는 한가지 방법을 제기하기로 한다.

화상에서 바둑판무늬를 산생시키는 요인이 표본의 수가 적을 때 쏘볼렬이 규칙적인 배치에 있으므로 우리는 바둑판무늬를 제거하기 위하여 이 배치상태를 헝클어뜨리면서도 본래렬의 특성을 될수록 살리기 위한 방법을 제안하려고 한다. 그러기 위하여 행렬

의 원소의 2진표시에 우연적으로 생성해낸 치환을 적용하여 리용하려고 한다.

```
float SobolSampleFloat(int64_t a, int dimension)
  {
     uint32_t v = 0;
     static RNG rng;int perm[2];
     for (int i = dimension * SobolMatrixSize; a!= 0; a >>= 1, i++)
       {
         float randomnumber = rng.UniformFloat();
         if (randomnumber >= threshold) {perm[0]=1; perm[0]=0;}
           else {perm[0]=0; perm[1]=1;}
         if (a & 1)
           {
             int b, c = Matrices32[i];
             for( int j = 0 ; c! = 0 ; c>>=1, j++)
             b += perm[ c-(c>>1)*2 ] << j;
             v^=b;
           }
       }
     return v * 2.3283064365386963e-10f; /* 1/2^32 */
  }
```

이 렬은 쏘볼렬과 불일치량이 얼마 차이나지 않으면서도 쏘볼렬의 규칙적인 배치를 헝클어뜨림으로써 바둑판무늬를 제거하게 한다. 제안한 표본렬을 가지고 sportscar장면에 대한 렌더링을 진행한 결과와 쏘볼렬과 비교해본 결과는 표와 같다. 실험은 Core(TM) i5-4590 CPU @3.30GHz(4CPUs)에서 진행하였으며 화상의 크기는 1 280×720pixel이고 매 화소당 16개의 표본을 선택하였다.

표. 계산결과

	제안한 표본렬	쏘볼렬
시간/s	54.5	56.2
오차	12.709 0	13.821 5

10번의 실험을 진행하여 시간과 오차의 평균값을 계산하였다.

표에서 보는바와 같이 시간은 거의 비슷하나 오차는 91.9%로 감소되였다.

참 고 문 헌

[1] I. Sobol; Zh. Vychisl. Mat. mat. Fiz., 7, 4, 784, 1967.

[2] J. Kuo; SIAM J. Sci. Comput., 30, 2635, 2008.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

A Method for Better Quality with Improved Sample Sequence in 3D Rendering

Han Song, Ri Jong Ro

We propose one better Sobol sequence for conquering checkerboard texture when the number of samples is small in Sobol sequence.

Key words: checkerboard texture, Sobol sequence

n이 2의 제곱일 때 일반화된 균형적시합배치 GBTD(n, n)의 구성

김성철, 김성남

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《나라의 과학기술을 세계적수준에 올려세우자면 발전된 과학기술을 받아들이는것과 함께 새로운 과학기술분야를 개척하고 그 성과를 인민경제에 적극 받아들여야 합니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138~139폐지)

GBTD(k, m)은 다른 조합적배치의 구성에서도 리용되며 동등기호무게부호의 구성을 비롯하여 부호리론에서 자주 리용되는것으로 하여 그것의 존재성과 구성법[1, 2]에 대한 연구가 많이 진행되였다. GBTD의 구성방법들을 보면 여러가지 보조적인 배치를 리용하는 방법, 차분행렬을 리용하여 구성하는 방법, GBTD(k, k)와 동등한 k^2차행렬의 구성에 의한 방법 등이 있다.

론문에서는 아직까지 미해결로 남아있는 경우인 $n=2^k,\ k\ge 2$인 경우 GBTD(n, n)을 차분행렬을 리용하여 구성한다.

우리는 론문에서 다음의 표기들을 리용한다.

$\mathbf{Z}_k=\{0, 1, \cdots, k-1\}$은 k를 모듈로 하는 옹근수모임의 잉여환이다.

$\mathbf{F}_n$은 원소수가 n인 유한체이다.

우리의 결과는 다음의 두가지 보조정리에 기초하고있다.

보조정리 1[2] 위수가 k인 가법군우에서의 균일한 $(n, n, n-1)-\mathrm{DM}$이 존재하면 $G\times\mathbf{Z}_k$우에서의 GBTD(n, n)이 존재한다.

보조정리 2 $n=2^k,\ k\ge 2$일 때 균일한 $(n, n, n-1)-\mathrm{DM}$이 존재한다.

증명 G를 유한체 $\mathbf{T}_n=\mathbf{Z}_2[x]/(g(x))$의 가법군으로 취한다. 여기서 $g(x)\in\mathbf{Z}_2[x]$는 k차기약다항식이고 $\mathbf{F}_n$의 원소들은 $\mathbf{Z}_2[x]$의 차수가 기껏 $k-1$인 다항식으로 표현되며 $\mathbf{F}_n$의 원소 $0, 1, x, x+1, \cdots, x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x+1$들을 각각 $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}$로 표시한다.

$\mathbf{F}_n$우에서 n차행렬 $D_1, D_2, \cdots, D_{n-1}$을 다음과 같이 구성한다.

$$D_i=\begin{pmatrix} a_1a_0 & a_1a_1 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_{n-1} \\ a_2a_0 & a_2a_1 & a_2a_2 & \cdots & a_2a_{n-1} \\ a_3a_0 & a_3a_1 & a_3a_2 & \cdots & a_3a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1}a_0 & a_{n-1}a_1 & a_{n-1}a_2 & \cdots & a_{n-1}a_{n-1} \\ a_i & a_i & a_i & \cdots & a_i \end{pmatrix}\quad (i=\overline{1,\ n-1})$$

D_i의 행들은 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$의 원소들로, 렬들은 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}\}$의 원소들로 번호를 붙인다. 매 D_i에 대하여 D_i의 임의의 서로 다른 두 행의 차가 $\mathbf{F}_n$의 원소들을 꼭 한번씩 포함한다는것 즉 차분행렬이라는것은 쉽게 알수 있다.

때문에 행렬 $D^{*1}=(D_1 | D_2 | D_3 | \cdots | D_{n-1})$ 역시 차분행렬이다. 그런데 D^{*1} 에서 첫 $n-1$ 개의 행들에는 모든 원소들이 다 $n-1$ 번씩 포함되지만 마지막행에는 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{n-1}$ 들이 각각 n 번씩 포함되며 $a_0(=0)$ 은 포함되지 않는다. 즉 균일하지 않다.

D^{*1} 을 균일하게 변경시키기 위하여 먼저 매 D_i 의 마지막행들에서 각각 하나의 원소씩을 $a_0(=0)$ 으로 바꾼다.

$i=\overline{1,\ n-1}$ 에 대하여 매 D_i 에서 마지막행의 j_i 렬의 원소들을 a_0 으로 교체하여 얻은 행렬을 D^{*2} 라고 하자.

이때 D^{*1} 과 D^{*2} 에서 바꾼 원소를 포함하는 렬들만을 추려서 보면 다음과 같다.(표 1, 2)

표 1. 교체전의 원소들

$a_1 j_1$	$a_1 j_2$	$\cdots$	$a_1 j_{n-1}$
$a_2 j_1$	$a_2 j_2$	$\cdots$	$a_2 j_{n-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$a_{n-1} j_1$	$a_{n-1} j_2$	$\cdots$	$a_{n-1} j_{n-1}$
a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-1}

표 2. 교체후의 원소들

$a_1 j_1$	$a_1 j_2$	$\cdots$	$a_1 j_{n-1}$
$a_2 j_1$	$a_2 j_2$	$\cdots$	$a_2 j_{n-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$a_{n-1} j_1$	$a_{n-1} j_2$	$\cdots$	$a_{n-1} j_{n-1}$
a_0	a_0	$\cdots$	a_0

D^{*1} 에서 임의의 서로 다른 두 행의 차는 $\mathbf{F}_n$ 의 원소들을 꼭 $n-1$ 번씩 포함한다.

우리는 D^{*2} 에서 첫행과 마지막행의 차가 $\mathbf{F}_n$ 의 원소들을 꼭 $n-1$ 번씩 포함하도록 한다.

첫행과 마지막행의 차는 D^{*1} 에서는 $(j_1+a_1,\ j_2+a_2,\ \cdots,\ j_{n-1}+a_{n-1})$ 이고 D^{*2} 에서는 $(j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_{n-1})$ 이다. $a_1=1,\ a_0=0$ 이고 G 에서 $+$ 와 $-$ 는 동등하다는것을 주의해둔다.

$\{j_1+a_1,\ j_2+a_2,\ \cdots,\ j_{n-1}+a_{n-1}\}=\{j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_{n-1}\}$ 이도록 하기 위하여 $j_i,\ i=\overline{1,\ n-1}$ 들을

$$\begin{cases} j_1+a_1=j_2 \\ j_2+a_2=j_3 \\ \quad\vdots \\ j_{n-2}+a_{n-2}=j_{n-1} \\ j_{n-1}+a_{n-1}=j_1 \end{cases}$$

과 같은 $\mathbf{F}_n$ 우의 련립1차방정식의 풀이로 놓는다.

이 방정식을 다시 쓰면

$$\begin{cases} j_1+j_2=a_1 \\ j_2+j_3=a_2 \\ \quad\vdots \\ j_{n-2}+j_{n-1}=a_{n-2} \\ j_{n-1}+j_1=a_{n-1} \end{cases}$$

인데 결수행렬과 확대행렬은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & a_{n-2} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

이 행렬들은 둘 다 모든 행벡토르들의 합이 0벡토르이며 결수행렬의 임의의 $n-2$ 개 행은 1차독립이다. 그러므로 결수행렬과 확대행렬의 위수는 $n-2$ 로서 같고 련립1차방정식은 풀이를 가지며 풀이는 다음과 같다.

$$(j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_{n-1}) \in \{(c,\ c+a_1,\ c+a_1+a_2,\ \cdots,\ c+a_1+a_2+\cdots+a_{n-2}) : c \in \mathbf{F}_n\}$$

그러므로 첫행과 마지막행의 차가 $\mathbf{F}_n$ 의 원소들을 꼭 $n-1$번씩 포함하면서 마지막행이 $\mathbf{F}_n$ 의 원소들을 꼭 $n-1$번씩 포함하도록 D^{*2} 를 구성할수 있다.

이렇게 구성한 D^{*2} 가 $D^{*2} = (D_1' \mid D_2' \mid D_3' \mid \cdots \mid D_{n-1}')$ 과 같다고 하자.

새롭게 제기되는 문제는 $2 \sim (n-1)$ 행들과 마지막행의 차들의 균일성이 파괴되는것이다.

이 문제를 해결하기 위하여 $D_i',\ i=\overline{1,\ n-1}$ 의 $2 \sim (n-1)$ 행들에 각각 어떤 상수를 더한다. 이러한 더하기연산은 $D_i',\ i=\overline{1,\ n-1}$ 의 $1 \sim (n-1)$ 행들중 임의의 2개의 행의 차의 균일성에는 영향을 주지 못한다.

그러므로 $D_i',\ i=\overline{1,\ n-1}$ 의 $1 \sim (n-1)$ 행들의 j_i 렬의 원소들이 일치하도록 $D_i',\ i=\overline{1,\ n-1}$ 의 $2 \sim (n-1)$ 행들에 각각 적당한 상수(정확하게는 $j_i + a_r j_i$, $r=\overline{2,\ n-1}$ 은 행번호)를 더하면 이 문제가 해결된다는것을 알수 있다.

이렇게 얻은 행렬 D^{*3} 은 균일한 $(8,\ 8,\ 7)-\mathrm{DM}$ 이다.(증명끝)

보조정리 1, 2로부터 다음의 결과가 곧 나온다.

정리 $n=2^k,\ k \geq 2$ 일 때 $\mathrm{GBTD}(n,\ n)$ 이 존재한다.

참 고 문 헌

[1] C. J. Colbourn et al.; The CRC Handbook of Combinatorial Designs, CRC Press, 72～336, 2007.
[2] P. P. Dai et al.; Des. Codes Cryptogr., 74, 15, 2015.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

Construction of Generalized Balanced Tournament Designs GBTD(n, n) when n is 2's Power

Kim Song Chol, Kim Song Nam

We construct the generalized balanced tournament designs GBTD(n, n) when $n=2^k$, $k \geq 2$, using difference matrices.

Key word: difference matrix

김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

일반화된 리만－류빌분수계미분방정식에 대한 적분경계값문제풀이의 존재성

리영도, 박은철

지금까지 여러가지 형태의 분수계도함수의 정의가 나왔으나 가장 대표적인 정의는 리만－류빌과 캐푸토의미의 도함수이다.

선행연구[2, 4]에서는 일반화된 리만－류빌분수계미분방정식에 대한 초기값문제의 풀이의 존재성과 안정성을 연구하였으며 선행연구[3]에서는 여러점경계값문제의 풀이의 존재성을 밝혔다.

론문에서는 쉐퍼부동점정리와 바나흐축소원리를 리용하여 공명이 아닌 경우 일반화된 리만－류빌분수계미분방정식에 대한 적분경계값문제의 풀이의 존재성에 대하여 연구하였다.

우리는 다음과 같은 적분경계값문제의 풀이의 존재성에 대하여 고찰하려고 한다.

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha,\,\beta}x(t)=f(t,\ x(t),\ D_{0+}^{\alpha_0,\,\beta}x(t)),\ t\in(0,\ T]=:J\setminus\{0\} \\ I_{0+}^{1-\gamma}x(0)=\int_0^T g(s)x(s)ds \end{cases} \tag{1}$$

여기서 $D_{0+}^{\alpha,\,\beta}x(t)$ 는 α 계 β 형 일반화된 리만－류빌분수계도함수, $0<\alpha_0<\alpha<1,\ 0\le\beta\le1$, $\gamma=\alpha+\beta-\alpha\beta$, $\gamma_0=\alpha_0+\beta-\alpha_0\beta$, $\gamma_1=\beta(1-\alpha_0)+\gamma-\gamma_0$, $g\in C[J,\ \mathbf{R}_+]$, $f: J\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 는 $x\in C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}]$, $y\in C_{1-\gamma_1}[J,\ \mathbf{R}]$ 에 대하여 $f(\cdot,\ x(\cdot),\ y(\cdot))\in C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}]$ 인 함수이고 $\int_0^T g(s)s^{\gamma-1}ds\ne\Gamma(\gamma)$ 이다.

정의 1[5] 함수 f 의 α 계 β 형 왼쪽일반화된 리만－류빌분수계도함수는 다음과 같이 정의된다.

$$D_{0+}^{\alpha,\,\beta}f(t):=(I_{0+}^{\beta(1-\alpha)}D(I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}f))(t)\ \ (0<\alpha<1,\ 0\le\beta\le1)$$

여기서 $D:=d/dt$ 이다.

정의 2[1] $0\le\gamma<1$ 일 때 구간 J 에서 무게붙은 련속함수공간은 다음과 같이 정의된다.

$$C_\gamma[J,\ \mathbf{R}]:=\{f: J\to\mathbf{R}\,|\,t^\gamma f(t)\in C[J,\ \mathbf{R}]\},\ \ C_{1-\gamma}^\gamma[J,\ \mathbf{R}]:=\{f\in C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}]\,|\,D^\gamma f\in C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}]\}$$

그러면 $C_\gamma[J,\ \mathbf{R}]$ 는 노름 $\|f\|_{C_\gamma}=\|t^\gamma f\|_C$ 에 관하여 바나흐공간으로 된다.

보조정리 1[3] $\alpha>0,\ \beta>0$ 이면 다음의 식이 성립한다.

$$(I_{0+}^\alpha s^{\beta-1})(t)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}t^{\beta+\alpha-1},\ (D_{0+}^\alpha s^{\alpha-1})(t)=0\ \ (0<\alpha<1)$$

보조정리 2[3] $\alpha>0,\ \beta>0$ 이고 $t\in[0,\ T]$ 일 때 $f\in L^1(J)$ 이면

$$(I_{0+}^\alpha I_{0+}^\beta f)(t)=(I_{0+}^{\alpha+\beta}f)(t),\ (D_{0+}^\alpha I_{0+}^\alpha f)(t)=f(t)$$

가 성립한다. 특히 $f\in C_\gamma[J,\ \mathbf{R}]$ 또는 $f\in C[J,\ \mathbf{R}]$이면 우의 등식들은 각각 $t\in(0,\ T]$ 또는 $t\in[0,\ T]$에서 성립한다.

보조정리 3[3] $0<\alpha<1,\ 0\le\gamma<1$이라고 하자. 만일 $f\in C_\gamma[J,\ \mathbf{R}]$이고 $I_{0+}^{1-\alpha}f\in C_\gamma^1[J,\ \mathbf{R}]$이면 $I_{0+}^\alpha D_{0+}^\alpha f(t)=f(t)-\dfrac{I_{0+}^{1-\alpha}f(0)}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}\ (t\in J)$이 성립한다.

보조정리 4[3] $0\le\gamma<1$이고 $f\in C_\gamma[J,\ \mathbf{R}]$이면 $I_{0+}^{1-\alpha}f(0):=\lim\limits_{t\to0^+}I_{0+}^{1-\alpha}f(t)=0\ (0\le\gamma<\alpha)$이 성립한다.

보조정리 5[3] $\alpha>0,\ \beta>0$이고 $\gamma=\alpha+\beta-\alpha\beta$일 때 $f\in C_{1-\gamma}^\gamma[J,\ \mathbf{R}]$이면

$$I_{0+}^\gamma D_{0+}^\gamma f=I_{0+}^\alpha D_{0+}^{\alpha,\,\beta}f,\ D_{0+}^\gamma I_{0+}^\alpha f=D_{0+}^{\beta(1-\alpha)}f$$

가 성립한다.

보조정리 6[3] $f\in L^1(J)$, $D_{0+}^{\beta(1-\alpha)}f\in L^1(J)$이면 $D_{0+}^{\alpha,\beta}I_{0+}^\alpha f=I_{0+}^{\beta(1-\alpha)}D_{0+}^{\beta(1-\alpha)}f$가 성립한다.

보조정리 7(쉐퍼부동점정리)[5] E를 바나흐공간, $T:E\to E$를 완전련속연산자, $V:=\{u\in E\,|\,u=\delta(Tu),\ 0<\delta<1\}$이 유계모임이라고 하면 T는 E에서 부동점을 가진다.

정리 1 $x\in C_{1-\gamma}^\gamma[J,\ \mathbf{R}]$를 문제 (1)의 풀이라고 할 때 $D_{0+}^{\alpha,\,\beta}x(t)=u(t)$에 의해 규정되는 $u\in C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}]$는 적분방정식

$$u(t)=f\left(t,\ Zt^{\gamma-1}\int_0^T g(s)I_{0+}^\alpha u(s)ds+I_{0+}^\alpha u(t),\ Z\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma_1)}t^{\gamma-1}\int_0^T g(s)I_{0+}^\alpha u(s)ds+I_{0+}^{\alpha-\alpha_0}u(t)\right)\quad(2)$$

를 만족시킨다. 거꾸로 방정식 (2)를 만족시키는 $u\in C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}]$에 대하여

$$x(t)=Zt^{\gamma-1}\int_0^T g(s)I_{0+}^\alpha u(s)ds+I_{0+}^\alpha u(t)\quad\left(Z=1\Big/\left[\Gamma(\gamma)-\int_0^T g(s)s^{\gamma-1}ds\right]\right)\quad(3)$$

는 문제 (1)의 풀이이다.

정리 2 다음의 가정들을 만족시킨다고 하자.

가정 1 함수 $x\mapsto f(t,\ x,\ y),\ y\mapsto f(t,\ x,\ y)$가 임의의 $t\in J$와 $x\in C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}]$, $y\in C_{1-\gamma_1}[J,\ \mathbf{R}]$에 대하여 $C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}]$에서 련속이다.

가정 2 적당한 상수 $L,\ M,\ N>0$이 있어서 임의의 $t_1,\ t_2\in J$와 $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2\in\mathbf{R}$에 대하여 $|t_1^{1-\gamma}f(t_1,\ t_1^{\gamma-1}x_1,\ t_1^{\gamma_1-1}y_1)-t_2^{1-\gamma}f(t_2,\ t_2^{\gamma-1}x_2,\ t_2^{\gamma_1-1}y_2)|\le L|t_1-t_2|+M|x_1-x_2|+N|y_1-y_2|$가 성립한다.

가정 3 $\lim\limits_{t\to0}t^{1-\gamma}f(t,\ x,\ y)=0\ (x,\ y\in\mathbf{R})$이 성립한다.

가정 4 $Z_*<1$이 성립한다. 여기서

$$Z_*=M\frac{1}{\Gamma(\alpha)}B(\gamma,\ \alpha)\left(|Z|g_*\frac{T^{\alpha+\gamma}}{\alpha+\gamma}+T^\alpha\right)+$$

$$+N\left(|Z|\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma_1)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}B(\gamma,\ \alpha)g_*\frac{T^{\alpha+\gamma}}{\alpha+\gamma}+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha_0)}B(\gamma,\ \alpha-\alpha_0)T^{\alpha-\alpha_0}\right)$$

이때 $g_* = \max_{t \in J} |g(t)|$이다. 그러면 문제 (1)은 적어도 하나의 풀이를 가진다.

정리 3 다음의 가정들을 만족시킨다고 하자.

가정 5 함수 $f: J \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 는 임의의 $x, y \in C_{1-\gamma}[J, \mathbf{R}]$ 에 대하여 $x \to f(t, x, y)$, $y \to f(t, x, y) \in C_{1-\gamma}[J, \mathbf{R}]$라고 할 때 적당한 상수 $P, Q > 0$이 있어서

$$|f(t, u_1, t^{\gamma_1 - \gamma} v_1) - f(t, u_2, t^{\gamma_1 - \gamma} v_2)| \le P|u_1 - u_2| + Q|v_1 - v_2| \ (u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbf{R})$$

가 성립한다.

가정 6 $P\frac{B(\gamma, \alpha)}{\Gamma(\alpha)}\left(g_* \frac{T^{\alpha+\gamma}}{\alpha+\gamma} + T^{\alpha+\gamma-1}\right) + Q\left(Z\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma_1)}\frac{B(\gamma, \alpha)}{\Gamma(\alpha)} g_* \frac{T^{\alpha+\gamma}}{\alpha+\gamma} + \frac{B(\gamma, \alpha-\alpha_0)}{\Gamma(\alpha-\alpha_0)} T^{\alpha}\right) < 1$

이 성립하면 문제 (1)은 유일한 풀이를 가진다.

실례 다음의 일반화된 리만－류빌분수계미분방정식에 대한 적분경계값문제를 고찰하자.

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha, \beta} x(t) = [\sin(t^{1-\gamma} x(t) + t^{1-\gamma_1} D_{0+}^{\alpha_0, \beta} x(t))]/(5t^{1-\gamma}) \ \ (t \in (0, 1]) \\ I_{0+}^{1-\gamma} x(0) = \int_0^1 g(s) x(s) ds \end{cases} \tag{4}$$

여기서 $\alpha = 1/2, \ \beta = 1/2, \ \gamma = 3/4$ 이고 $g(t) = t^2$ 이며 $\alpha_0 = 1/3, \ \gamma_0 = 2/3, \ \gamma_1 = 5/12$ 이다.

$f(t, x, y) = \sin(t^{1-\gamma} x + t^{1-\gamma_1} y)/t^{1-\gamma}$ 이므로 임의의 $t \in (0, 1]$ 과 임의의 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}_+$ 에 대하여 가정 1－3을 만족시킨다는것을 쉽게 알수 있다. 또한 $M = 0.2, \ N = 0.2$ 이므로 $Z_* \approx 0.89 < 1$ 이다. 따라서 가정 4를 만족시킨다. 결국 식 (4)는 적어도 하나의 풀이를 가진다.

참 고 문 헌

[1] A. A. Kilbas et al.; Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, 147～238, 2006.

[2] D. Vivek et al.; Fract. Calc. Appl. Anal., 21, 4, 1120, 2018.

[3] D. Vivek et al.; Mediterr. J. Math., 15, 1, 2018.

[4] J. Wang et al.; Appl. Math. Comput., 266, 850, 2015.

[5] R. Hilfer, Application of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, 82～157, 1999.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

The Existence of Solutions of Integral Boundary Value Problem for Generalized Riemman-Liouville Fractional Differential Equation

Ri Yong Do, Pak Un Chol

We study the existence of the solutions of the integral boundary value problems for the generalized Riemman-Liouville fractional differential equations at non-resonance.

We obtain an existence condition of the solutions for the integral boundary value problems using the Schaefer fixed point theorem. Finally, we illustrate our result with an example.

Key words: generalized Riemman-Liouville derivative, Schaefer fixed point theorem

김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

두점경계조건을 가진 상결수다항분수계미분방정식의 해석적풀이법

정성국, 리성림

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《기초과학을 끊임없이 심화발전시키지 않고서는 첨단과학기술을 연구도입할수도 없고 새로운 높은 수준의 과학기술을 연구개발할수도 없습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제22권 21페지)

선행연구[1]에서는 선형다항분수계미분방정식의 초기값문제의 풀이에 대한 표시식을 연산자법으로 얻었다. 선행연구[3]에서는 선행연구[1]의 결과를 리용하여 여러가지 형태의 선형, 비선형분수계미분방정식의 초기값문제에 대한 풀이법과 풀이의 존재성을 론의하였다.

선행연구[2]에서는 라쁠라스변환을 리용하여 선형다항분수계미분방정식의 일반풀이의 양적인 표시식을 얻었다. 그러나 복잡한 풀이표시식에 들어있는 무한합렬의 절대수렴성은 밝히지 않고 수렴한다고 가정하고있다. 선행연구[4]에서는 다항분수계미분방정식의 주기경계값문제에 대한 풀이의 존재성을 론의하였고 라쁠라스변환을 리용하여 그린함수를 구성하였다. 이때 그 그린함수를 구성하는 무한합렬의 절대수렴성을 론의하지 않았다. 선행연구들에서 나타나고있는 이러한 부족점들은 다항분수계미분방정식의 리용에서 많은 제약을 주고있다.

론문에서는 먼저 $I+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{\alpha_i}$ 형태의 분수계적분연산자들이 임의의 $\lambda_i \in \mathbf{R}$ 와 임의의 $\alpha_i > 0$ 에 대하여 련속가역이 되기 위한 조건을 해명하고 그 거꿀의 해석적표시를 얻는다. 이것은 $\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{\alpha_i}\right\| < 1$ 일 때 연산자 $I+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{\alpha_i}$ 이 련속가역이라는 거꿀연산자정리결과의 확장으로 된다. 이 표시를 리용하여 선형상결수다항분수계미분방정식의 주기경계값문제의 해석적풀이를 얻었다.

1. 미타그-레플레르함수에 의한 분수계적분연산자의 해석적거꿀표현식

함수

$$E_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)},\ \alpha>0$$

을 미타그-레플레르함수, 함수

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\ \alpha>0$$

을 일반화된 미타그-레플레르함수라고 부른다.

주의 1 미타그-레플레르함수와 일반화된 미타그-레플레르함수는 복소수평면의 전구역에서 절대수렴한다.

정의 [1] (여러변수 미타그－레플레르함수)

$$E_{(a_1,\cdots,a_n),b}(z_1,\ \cdots,\ z_n)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l_1,\cdots,l_n\ge 0}^{l_1+\cdots+l_n=k}\binom{k}{l_1,\ \cdots,\ l_n}\frac{\prod_{j=1}^{n}z_j^{l_j}}{\Gamma\left(b+\sum_{j=1}^{n}a_j l_j\right)} \tag{1}$$

이다. 여기서

$$\binom{k}{l_1,\ \cdots,\ l_n}=\frac{k!}{l_1!,\ \cdots,\ l_n!}\ (k,\ l_1,\ \cdots,\ l_n\in\mathbf{N}_0)$$

이다.

주의 2 여러변수 미타그－레플레르함수는 선행연구[2]에서 정의되였다. 그러나 무한합렬로 이루어진 이 함수의 $\mathbf{R}^n$ 에서의 절대수렴성을 찾아볼수 없다. 그러므로 여기서는 이 합렬의 절대수렴성을 고찰한다.

보조정리 $b,\ a_1,\ \cdots,\ a_n>0$ 일 때 여러변수 미타그－레플레르함수 (1)은 $\mathbf{R}^n$ 에서 절대수렴한다.

정리 1 임의의 $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n\in\mathbf{R},\ \beta_1,\ \cdots,\ \beta_n\ge 0$ 에 대하여 다음의 사실이 성립한다.

연산자 $I+\sum_{r=1}^{n}\lambda_r I_{0+}^{\beta_r}:C[0,\ T]\to C[0,\ T]$ 는 련속가역연산자이다. 특히 $\forall h\in C[0,\ T]$,

$$\left(I+\sum_{r=1}^{n}\lambda_r I_{0+}^{\beta_r}\right)^{-1}h(t)=h(t)-\sum_{l=1}^{n}\lambda_l\int_0^t (t-s)^{\beta_l-1}E_{(\beta_1,\ \cdots,\ \beta_n),\beta_l}(-\lambda_1(t-s)^{\beta_1},\ \cdots,\ -\lambda_n(t-s)^{\beta_n})h(s)ds$$

가 성립한다.

2. 최고계수가 1이하인 상결수다항분수계미분방정식의 반주기경계값문제의 해석적풀이법

반주기경계조건을 가진 상결수다항분수계미분방정식을 고찰하자.

$$L(D)u(t)=f(t)\ \ (t\in[0,\ T],\ T>0) \tag{2}$$

$$u(0)+u(T)=0 \tag{3}$$

여기서

$$L(D):=\lambda_n {}^cD_{0+}^{\alpha_n}+\lambda_{n-1} {}^cD_{0+}^{\alpha_{n-1}}+\cdots+\lambda_1 {}^cD_{0+}^{\alpha_1}+\lambda_0 {}^cD_{0+}^{\alpha_0}$$

$$\lambda_i\in\mathbf{R}\ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n),\ \lambda_n\ne 0,\ \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^2\ne 0,\ 0<\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_{n-1}<\alpha_n<1$$

이다.

정리 2 $f:[0,\ T]\to\mathbf{R}$ 는 련속이라고 하자. $u(t)$ 가 식 (2), (3)의 풀이이면 $y(t)={}^cD_{0+}^{\alpha_n}u(t)$ 로 결정되는 $y(t)$ 는 $C[0,\ T]$ 에서 적분방정식

$$y(t)+\lambda_{n-1}I_{0+}^{\beta_{n-1}}y(t)+\cdots+\lambda_1 I_{0+}^{\beta_1}y(t)+\lambda_0 I_{0+}^{\beta_0}y(t)=f(t) \tag{4}$$

의 풀이이다. 거꾸로 $y(t)$가 적분방정식 (4)의 풀이이면 식 $u(t)=I_{0+}^{\alpha_n}y(t)-\frac{1}{2}I_{0+}^{\alpha_n}y(t)|_{t=T}$로 결정되는 $u(t)$는 식 (2), (3)의 풀이이다.

정리 2에 의하여 식 (2), (3)의 풀이를 구하는 문제는 결국 적분방정식 (4)의 풀이를 구하는 문제에 귀착된다.

이제 적분방정식 (4)의 해석적풀이를 구할수 있다. 정리 1에 의해 적분방정식 (4)의 풀이는 다음과 같이 표시된다.

$$y(t)=f(t)-\sum_{l=0}^{n-1}\lambda_l\int_0^t(t-s)^{\beta_l-1}E_{(\beta_0,\cdots,\beta_{n-1}),\ \beta_l}(-\lambda_0(t-s)^{\beta_0},\ \cdots,\ -\lambda_{n-1}(t-s)^{\beta_{n-1}})f(s)ds$$

이로부터 다음의 정리가 성립한다.

정리 3 $f:[0,\ T]\to\mathbf{R}$는 련속이라고 하자. 이때 식 (2), (3)의 풀이는 다음과 같이 표시된다.

$$u(t)=I_{0+}^{\alpha_n}f(t)-\sum_{l=0}^{n-1}\lambda_l I_{0+}^{\alpha_n}\int_0^t(t-s)^{\beta_l-1}E_{(\beta_0,\cdots,\beta_{n-1}),\ \beta_l}(-\lambda_0(t-s)^{\beta_0},\cdots,-\lambda_{n-1}(t-s)^{\beta_{n-1}})f(s)ds-$$

$$-\frac{1}{2}I_{0+}^{\alpha_n}f(T)+\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n-1}\lambda_l I_{0+}^{\alpha_n}\int_0^t(t-s)^{\beta_l-1}E_{(\beta_0,\cdots,\beta_{n-1}),\beta_l}(-\lambda_0(t-s)^{\beta_0},\cdots,-\lambda_{n-1}(t-s)^{\beta_{n-1}})f(s)ds|_{t=T}$$

여기서 $\beta_i:=\alpha_n-\alpha_i\ \ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$이다.

3. 한가지 상결수다항분수계미분방정식의 두점경계값문제의 해석적풀이

두점경계조건을 가진 상결수다항분수계미분방정식을 고찰하자.

$$L(D)u(t)=f(t),\ t\in[0,\ T],\ T>0 \tag{5}$$

$$u(0)=a,\ u(T)=b \tag{6}$$

여기서

$$L(D):={}^cD_{0+}^{\alpha_n}+\lambda_{n-1}{}^cD_{0+}^{\alpha_{n-1}}+\cdots+\lambda_1{}^cD_{0+}^{\alpha_1}+\lambda_0{}^cD_{0+}^{\alpha_0}$$

$$\lambda_i\in\mathbf{R}\ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n),\ \lambda_n\neq0,\ \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^2\neq0,\ 1<\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_{n-1}<\alpha_n<2$$

이다.

정리 4 $f:[0,\ T]\to\mathbf{R}$를 련속이라고 하자. $u(t)$가 식 (5), (6)의 풀이이면 $y(t)={}^cD_{0+}^{\alpha_n}u(t)$로 결정되는 $y(t)$는 $C[0,\ T]$에서 적분방정식

$$y(t)+\lambda_{n-1}I_{0+}^{\beta_{n-1}}y(t)+\cdots+\lambda_1I_{0+}^{\beta_1}y(t)+\lambda_0I_{0+}^{\beta_0}y(t)=f(t) \tag{7}$$

의 풀이이다. 거꾸로 $y(t)$가 적분방정식 (7)의 풀이이면 식

$$u(t)=a+\frac{b-a-I_{0+}^{\alpha_n}y(t)|_{t=T}}{T}t+I_{0+}^{\alpha_n}y(t)$$

로 결정되는 $u(t)$는 식 (5), (6)의 풀이이다. 따라서 식 (5), (6)의 풀이를 구할수 있다.

정리 5 $f:[0,\ T]\to\mathbf{R}$를 련속이라고 하자. 이때 식 (5), (6)의 풀이는 다음과 같이 표시된다.

$$u(t)=a+\frac{b-a-I_{0+}^{\alpha_n}f(t)|_{t=T}}{T}t+$$

$$+\frac{t}{T}\sum_{l=0}^{n-1}\lambda_l I_{0+}^{\alpha_n}\int_0^t (t-s)^{\beta_l-1}E_{(\beta_0,\cdots,\beta_{n-1}),\beta_l}(-\lambda_0(t-s)^{\beta_0},\cdots,-\lambda_{n-1}(t-s)^{\beta_{n-1}})f(s)ds|_{t=T}+$$

$$+I_{0+}^{\alpha_n}f(t)-\sum_{l=0}^{n-1}\lambda_l I_{0+}^{\alpha_n}\int_0^t (t-s)^{\beta_l-1}E_{(\beta_0,\cdots,\beta_{n-1}),\beta_l}(-\lambda_0(t-s)^{\beta_0},\cdots,-\lambda_{n-1}(t-s)^{\beta_{n-1}})f(s)ds$$

여기서 $\beta_i:=\alpha_n-\alpha_i,\ i=0,1,\cdots,n-1$이다.

참 고 문 헌

[1] Y. Luchko et al.; Acta Math. Vietnam., 24, 207, 1999.

[2] A. A. Kilbas et al.; Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam, 49～67, 2006.

[3] Yizheng Hu et al.; Journal of Computational and Applied Mathematics, 215, 1, 2008.

[4] S. Choudhary et al.; Fractional Calculus and Applied Analysis, 17, 2, 333, 2014.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

The Analytic Solution Method of Multi-Term Fractional Differential Equations with Constant Coefficients with Two-Point Boundary Condition

Jong Song Guk, Ri Song Rim

In this paper, we obtain the analytic expression of the inverse of the fractional integral operator $I+\sum_{r=1}^{n}\lambda_r I_{0+}^{\beta_r}$ and the simple analytic solution expression of the boundary value problems associated with equations of the form ${}^cD_{0+}^{\alpha}u(t)+\sum_{r=1}^{n}\lambda_r {}^cD_{0+}^{\alpha_r}u(t)=f(t)$.

Key word: fractional calculus

김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

2차원비선형리만－류빌시간분수확산－반응방정식에 대한 예측자－수정자콤팍트수치방법

김려송, 김종철

론문에서는 시간이 지나감에 따라 달라지는 확산과정을 모형화하는 수정된 이상확산방정식에 반응항이 추가된 다음의 2차원비선형분수확산－반응방정식에 대한 계차방법을 연구하였다.

$$u_t(x,\ y,\ t)=(A_1D_t^{1-\alpha}+A_2D_t^{1-\beta})[K_1u_{xx}(x,\ y,\ t)+K_2u_{yy}(x,\ y,\ t)+f(u,\ x,\ y,\ t)]+ \\ +g(u,\ x,\ y,\ t)\ \ (0<x,\ y<L,\ 0<t\le T) \tag{1}$$

초기조건과 경계조건은 다음과 같다.

$$u(x,\ y,\ 0)=\phi(x,\ y)\ \ (0\le x,\ y\le L) \tag{2}$$

$$u(0,\ y,\ t)=\varphi_1(y,\ t),\ u(L,\ y,\ t)=\varphi_2(y,\ t)\ \ (0\le y\le L,\ 0\le t\le T) \tag{3}$$

$$u(x,\ 0,\ t)=\psi_1(x,\ t),\ u(x,\ L,\ t)=\psi_2(x,\ t)\ \ (0\le x\le L,\ 0\le t\le T) \tag{4}$$

여기서 $0<\alpha,\ \beta<1$이고 K_1과 K_2는 정인 상수들이고 A_1과 A_2는 $A_1+A_2>0$인 부아닌 상수들이다. $A_1=0$이면 $\alpha\ge\beta$, $A_2=0$이면 $\beta\ge\alpha$라고 약속한다.

$\phi(x,\ y),\ \varphi_1(y,\ t),\ \varphi_2(y,\ t),\ \psi_1(x,\ t),\ \psi_2(x,\ t)$는 충분히 미끈한 주어진 함수들이다.

$0<\gamma<1\ (\gamma=\alpha,\ \beta)$에 대해 $D_t^{1-\gamma}$는 $(1-\gamma)$계리만－류빌시간분수미분연산자이다. 그리고 비선형원천항 $g(u,\ x,\ y,\ t)$는 련속인 2계편도함수 $g_{tt}(u,\ x,\ y,\ t)$를 가지며 u에 관하여 립쉬츠조건을 만족시킨다고 가정한다. 그리고 $f(u,\ x,\ y,\ t)$는

$$f(u,\ x,\ y,\ t)=-K_3u+q(x,\ y,\ t)$$

의 형태를 취한다고 가정한다. 여기서 K_3은 부아닌 상수이고 $q(x,\ y,\ t)$는 주어진 함수이다.

선행연구[4]에서는 1차원비선형분수확산방정식에 대해 수렴차수가 $O(\tau+h^4)$인 무조건안정한 콤팍트계차도식을, 선행연구[1]에서는 그것을 확장하여 2차원비선형분수확산방정식에 대해 수렴차수가 $O(\tau+h_1^4+h_2^4)$인 무조건안정한 선형인 콤팍트계차도식을, 선행연구[5]에서는 문제 (1)－(4)를 시간적분법과 분수제형공식을 리용하여 리산화함으로써 수렴차수가 $O(\tau^2+h_1^4+h_2^4)$인 콤팍트계차도식을 제기하였다. 그런데 계차도식은 많은 계산을 필요로 하는 반복법에 의해 풀려져야 하는 비선형음도식이다.

론문에서는 선행연구[5]에서의 방법을 개량하여 방정식 (1)－(4)에 대한 예측자－수정자선형콤팍트음도식을 제기하고 안정성과 수렴성을 해석하였다.

론문에서는 그물점이 $(x_n,\ y_m,\ t_k)$인 등간격그물을 리용한다. 여기서

$$u(0,\ y,\ t)=\varphi_1(y,\ t),\ u(L,\ y,\ t)=\varphi_2(y,\ t)\ \ (0\le y\le L,\ 0\le t\le T)$$

$$y_m=mh_2\ \ (m=0,\ 1,\ \cdots,\ M_2),\ t_k=k\tau\ \ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ N)$$

이다. $M_1,\ M_2,\ N$은 정의 옹근수이고 $h_1=L/M_1,\ h_2=L/M_2$과 $\tau=T/N$는 공간그물간격과 시간그물간격이다. 그물점 $(x_n,\ y_m,\ t_k)$에서 정확한 풀이 u를 $u_{n,m}^k$로 표시하고 수치

방법으로 얻은 풀이를 $U_{n,m}^k$ 로 표시한다. 론문에서 C 는 위치에 따라 다른 값을 취할수 있으며 τ, h_1, h_2 에 무관계한 일반적인 정의 상수이다. $\Omega=\{(x,\ y)\,|\,0<x,\ y<L\}$ 이라고 하자. 문제 (1)－(4)의 풀이가 $u(x,\ y,\ t)\in U(\overline{\Omega}\times[0,\ T])$ 라고 가정한다. 여기서

$$U(\overline{\Omega}\times[0,\ T])=\left\{u(x,\ y,\ t)\left|\frac{\partial^6 u}{\partial x^6},\ \frac{\partial^6 u}{\partial y^6},\ \frac{\partial^5 u}{\partial x^2\partial t^3},\ \frac{\partial^5 u}{\partial y^2\partial t^3},\ \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\in C(\overline{\Omega}\times[0,\ T])\right.\right\}$$

단순하게 하기 위해 다음의 표시들을 도입한다.

$$\delta_x^2 U_{n,m}^k=\frac{U_{n-1,m}^k-2U_{n,m}^k+U_{n+1,m}^k}{h_1^2},\ L_x U_{n,m}^k=\left(1+\frac{h_1^2}{12}\delta_x^2\right)U_{n,m}^k$$

$$\delta_y^2 U_{n,m}^k=\frac{U_{n,m-1}^k-2U_{n,m}^k+U_{n,m+1}^k}{h_2^2},\ L_y U_{n,m}^k=\left(1+\frac{h_2^2}{12}\delta_y^2\right)U_{n,m}^k$$

$$q_{n,m}^k=q(x_n,\ y_m,\ t_k),\ f_{n,m}^k=f(u_{n,m}^k,\ x_n,\ y_m,\ t_k),\ F_{n,m}^k=f(U_{n,m}^k,\ x_n,\ y_m,\ t_k)$$

$$g_{n,m}^k=g(u_{n,m}^k,\ x_n,\ y_m,\ t_k),\ G_{n,m}^k=g(U_{n,m}^k,\ x_n,\ y_m,\ t_k)$$

$$a_j^{(\gamma)}=(j+1)^\gamma-\frac{1}{\gamma+1}[(j+1)^{\gamma+1}-j^{\gamma+1}],\ c_j^{(\gamma)}=\frac{1}{\gamma+1}[(j+1)^{\gamma+1}-j^{\gamma+1}]-j^\gamma$$

$$d_j^{(\gamma)}=a_{j-1}^{(\gamma)}+c_j^{(\gamma)}=\frac{1}{\gamma+1}[(j+1)^{\gamma+1}-2j^{\gamma+1}+(j-1)^{\gamma+1}],\ b_j^{(\gamma)}=(j+1)^\gamma-j^\gamma\quad(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

여기서 $a_{-1}^{(\gamma)}=0$ 으로 약속한다. 이때 $d_0^{(\gamma)}=c_0^{(\gamma)}$ 이다. 또한

$$r_5=\frac{A_1\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},\ r_1=K_1r_5,\ r_3=K_2r_5,\ r_7=K_3r_5$$

$$r_6=\frac{A_2\tau^\beta}{\Gamma(\beta+1)},\ r_2=K_1r_6,\ r_4=K_2r_6,\ r_8=K_3r_6$$

선행연구[5]에서와 같이 식 (1)의 량변을 시간변수 t 에 관하여 t_k 에서 t_{k+1} 까지 적분하고 L_xL_y 를 작용시키면 선행연구[2, 3]로부터

$$\begin{aligned}L_xL_yu_{n,m}^{k+1}-L_xL_yu_{n,m}^k&=c_0^{(\alpha)}(r_1L_y\delta_x^2u_{n,m}^{k+1}+r_3L_x\delta_y^2u_{n,m}^{k+1}+r_5L_xL_yf_{n,m}^{k+1})+\\&+c_0^{(\beta)}(r_2L_y\delta_x^2u_{n,m}^{k+1}+r_4L_x\delta_y^2u_{n,m}^{k+1}+r_6L_xL_yf_{n,m}^{k+1})+\\&+(a_k^{(\alpha)}-a_{k-1}^{(\alpha)})(r_1L_y\delta_x^2u_{n,m}^0+r_3L_x\delta_y^2u_{n,m}^0+r_5L_xL_yf_{n,m}^0)+\\&+(a_k^{(\beta)}-a_{k-1}^{(\beta)})(r_2L_y\delta_x^2u_{n,m}^0+r_4L_x\delta_y^2u_{n,m}^0+r_6L_xL_yf_{n,m}^0)+\\&+\sum_{j=0}^{k-1}(d_{j+1}^{(\alpha)}-d_j^{(\alpha)})(r_1L_y\delta_x^2u_{n,m}^{k-j}+r_3L_x\delta_y^2u_{n,m}^{k-j}+r_5L_xL_yf_{n,m}^{k-j})+\\&+\sum_{j=0}^{k-1}(d_{j+1}^{(\beta)}-d_j^{(\beta)})(r_2L_y\delta_x^2u_{n,m}^{k-j}+r_4L_x\delta_y^2u_{n,m}^{k-j}+r_6L_xL_yf_{n,m}^{k-j})+\\&+L_xL_y\int_{t_k}^{t_{k+1}}g(u(x_n,\ y_m,\ t),\ x_n,\ y_m,\ t)dt+R_{1,n,m}^k+R_{2,n,m}^k\end{aligned}\tag{5}$$

이 얻어진다. 이제는 식 (5)를 리용하여 문제 (1)－(4)를 풀기 위한 예측자－수정자콤팍트음도식을 유도한다. 식 (5)에서 비선형원천항 g의 적분에 직4각형구적공식

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} g(u(x_n,\ y_m,\ t),\ x_n,\ y_m,\ t)dt = \tau g(u(x_n,\ y_m,\ t_k),\ x_n,\ y_m,\ t_k) + R_{3,\,n,\,m}^{p,\,k}$$

를 적용하고 자름오차를 생략하면 예측자콤팍트음도식이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
&[L_xL_y - c_0^{(\alpha)}(r_1L_y\delta_x^2 + r_3L_x\delta_y^2 - r_7L_xL_y) - c_0^{(\beta)}(r_2L_y\delta_x^2 + r_4L_x\delta_y^2 - r_8L_xL_y)]U_{n,\,m}^{p,\,k+1} = \\
&\quad = L_xL_yU_{n,m}^k + c_0^{(\alpha)}r_5L_xL_yq_{n,m}^{k+1} + c_0^{(\beta)}r_6L_xL_yq_{n,m}^{k+1} + \\
&\quad + (a_k^{(\alpha)} - a_{k-1}^{(\alpha)})(r_1L_y\delta_x^2U_{n,\,m}^0 + r_3L_x\delta_y^2U_{n,\,m}^0 - r_7L_xL_yU_{n,\,m}^0 + r_5L_xL_yq_{n,\,m}^0) + \\
&\quad + (a_k^{(\beta)} - a_{k-1}^{(\beta)})(r_2L_y\delta_x^2U_{n,\,m}^0 + r_4L_x\delta_y^2U_{n,\,m}^0 - r_8L_xL_yU_{n,\,m}^0 + r_6L_xL_yq_{n,\,m}^0) + \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-1}(d_{j+1}^{(\alpha)} - d_j^{(\alpha)})(r_1L_y\delta_x^2U_{n,\,m}^{k-j} + r_3L_x\delta_y^2U_{n,\,m}^{k-j} - r_7L_xL_yU_{n,\,m}^{k-j} + r_5L_xL_yq_{n,\,m}^{k-j}) + \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-1}(d_{j+1}^{(\beta)} - d_j^{(\beta)})(r_2L_y\delta_x^2U_{n,\,m}^{k-j} + r_4L_x\delta_y^2U_{n,\,m}^{k-j} - r_8L_xL_yU_{n,\,m}^{k-j} + r_6L_xL_yq_{n,\,m}^{k-j}) + \\
&\quad + \tau L_xL_yG_{n,\,m}^k \quad (n=1,\ \cdots,\ M_1-1;\ m=1,\ \cdots,\ M_2-1;\ k=0,\ \cdots,\ N-1) \\
&U_{n,\,m}^0 = \phi(nh_1,\ mh_2)\ \ (n=0,\ \cdots,\ M_1;\ m=0,\ \cdots,\ M_2) \\
&U_{0,\,m}^{p,\,k+1} = \varphi_1(mh_2,\ (k+1)\tau),\ U_{M_1,m}^{p,k+1} = \varphi_2(mh_2,\ (k+1)\tau)\ \ (m=0,\ \cdots,\ M_2;\ k=0,\ \cdots,\ N-1) \\
&U_{n,\,0}^{p,\,k+1} = \psi_1(nh_1,\ (k+1)\tau),\ U_{n,M_2}^{p,k+1} = \psi_2(nh_1,\ (k+1)\tau)\ \ (n=0,\ \cdots,\ M_1;\ k=0,\ \cdots,\ N-1)
\end{aligned} \tag{6}$$

이때 자름오차는

$$R_{n,\,m}^{1,\,k} = R_{1,\,n,\,m}^k + R_{2,\,n,\,m}^k + R_{3,\,n,\,m}^{p,\,k}$$

이고

$$|R_{n,\,m}^{1,\,k}| \le C\tau(\tau + \tau^2 + h_1^4 + h_2^4)$$

이 성립한다. 다음으로 식 (5)에서 g의 적분을 근사시키기 위해 제형구적공식

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} g(u(x_n,\ y_m,\ t),\ x_n,\ y_m,\ t)dt =$$

$$= \frac{\tau}{2}[g(u(x_n,\ y_m,\ t_k),\ x_n,\ y_m,\ t_k) + g(u(x_n,\ y_m,\ t_{k+1}),\ x_n,\ y_m,\ t_{k+1})] + R_{3,\,n,\,m}^{c,\,k}$$

를 적용한다. $g_{n,\,m}^{k+1}$ 대신에

$$G_{n,\,m}^{p,\,k+1} = g(U_{n,\,m}^{p,\,k+1},\ x_n,\ y_m,\ t_{k+1})$$

을 리용하고 초기조건 (2)와 경계조건 (3), (4)를 고려하면 수정자콤팍트음도식이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
&[L_xL_y - c_0^{(\alpha)}(r_1L_y\delta_x^2 + r_3L_x\delta_y^2 - r_7L_xL_y) - c_0^{(\beta)}(r_2L_y\delta_x^2 + r_4L_x\delta_y^2 - r_8L_xL_y)]U_{n,\,m}^{k+1} = \\
&\quad = L_xL_yU_{n,\,m}^k + c_0^{(\alpha)}r_5L_xL_yq_{n,\,m}^{k+1} + c_0^{(\beta)}r_6L_xL_yq_{n,\,m}^{k+1} + \\
&\quad + (a_k^{(\alpha)} - a_{k-1}^{(\alpha)})(r_1L_y\delta_x^2U_{n,\,m}^0 + r_3L_x\delta_y^2U_{n,\,m}^0 - r_7L_xL_yU_{n,\,m}^0 + r_5L_xL_yq_{n,\,m}^0) +
\end{aligned}$$

$$+(a_k^{(\beta)}-a_{k-1}^{(\beta)})(r_2L_y\delta_x^2U_{n,m}^0+r_4L_x\delta_y^2U_{n,m}^0-r_8L_xL_yU_{n,m}^0+r_6L_xL_yq_{n,m}^0)+$$
$$+\sum_{j=0}^{k-1}(d_{j+1}^{(\alpha)}-d_j^{(\alpha)})(r_1L_y\delta_x^2U_{n,m}^{k-j}+r_3L_x\delta_y^2U_{n,m}^{k-j}-r_7L_xL_yU_{n,m}^{k-j}+r_5L_xL_yq_{n,m}^{k-j})+$$
$$+\sum_{j=0}^{k-1}(d_{j+1}^{(\beta)}-d_j^{(\beta)})(r_2L_y\delta_x^2U_{n,m}^{k-j}+r_4L_x\delta_y^2U_{n,m}^{k-j}-r_8L_xL_yU_{n,m}^{k-j}+r_6L_xL_yq_{n,m}^{k-j})+$$
$$+\frac{\tau}{2}L_xL_y(G_{n,m}^k+G_{n,m}^{p,k+1})$$
$$(n=1,\ \cdots,\ M_1-1;\ m=1,\ \cdots,\ M_2-1;\ k=0,\ \cdots,\ N-1)$$
$$U_{n,m}^0=\phi(x_n,\ y_m),\ U_{0,m}^{k+1}=\varphi_1(y_m,\ (k+1)\tau),\ U_{M_1,m}^{k+1}=\varphi_2(y_m,\ (k+1)\tau)$$
$$U_{n,0}^{k+1}=\psi_1(x_n,\ (k+1)\tau),\ U_{n,M_2}^{k+1}=\psi_2(x_n,\ (k+1)\tau)$$
$$(n=0,\ \cdots,\ M_1;\ m=0,\ \cdots,\ M_2;\ k=0,\ \cdots,\ N-1)\tag{7}$$

이때 자름오차는 $R_{n,m}^{2,k}=R_{1,n,m}^k+R_{2,n,m}^k+R_{3,n,m}^{c,k}$이고 $|R_{n,m}^{2,k}|\le C\tau(\tau^2+h_1^4+h_2^4)$이다.

정리 1 예측자－수정자콤팍트음도식 (6), (7)은 유일한 풀이를 가진다.

정리 2 $0<\alpha,\ \beta\le\log_2 3-1$일 때 예측자－수정자콤팍트음도식 (6), (7)은 초기자료에 대하여 무조건안정하다.

정리 3 $0<\alpha,\ \beta\le\log_2 3-1$이라고 할 때 예측자－수정자콤팍트음도식 (6), (7)은 수렴하며 수렴차수는 $O(\tau^2+h_x^4+h_y^4)$이다.

참 고 문 헌

[1] M. Abbaszadeh et al.; Appl. Math., 66, 1345, 2013.

[2] M. R. Cui; J. Comput. Phys., 228, 20, 7792, 2009.

[3] M. R. Cui; Numer. Algorithms, 62, 3, 38, 2013.

[4] A. Mohebbi et al.; J. Comput. Phys., 240, 36, 2013.

[5] B. Yu et al.; Numer. Algorithms, 68, 923, 2015.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

Predictor-Corrector Compact Numerical Method for Two Dimensional Nonlinear Riemann-Liouville Time Fractional Diffusion-Reaction Equation

Kim Ryo Song, Kim Jong Chol

In this paper, we propose a predictor-corrector linear compact implicit scheme for two dimensional Riemann-Liouville time fractional diffusion-reaction equation with a nonlinear source term, and prove the unconditional stability and convergence of this scheme by the Fourier method.

Key words: Fourier method, modified anomalous diffusion equation

일반화된 안장점문제에 대한 비선형우자와알고리듬

황명근, 박영성, 한류경

론문에서는 일반화된 안장점문제를 반복적으로 풀기 위한 비정확한 우자와알고리듬의 수렴성을 개선하기 위하여 슈르분해선행처리기를 리용한 새로운 비선형우자와알고리듬을 제기하고 수렴성을 해석하고 수치실험을 통하여 제기된 방법의 효과성을 검증하였다.

1. 선행연구결과와 문제설정

H_1과 H_2는 $(\cdot, \cdot)$로 표시되는 스칼라적을 가진 유한차원힐베르트공간들이라고 하자. 일반화된 안장점문제[1]

$$\begin{pmatrix} A & B^{\mathrm{T}} \\ B & -C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \tag{1}$$

를 론의하자. 여기서 $A: H_1 \to H_1$은 선형대칭정의정값행렬이며 $B: H_1 \to H_2$는 선형넘기기에 대응하는 행렬, $B^{\mathrm{T}}: H_2 \to H_1$은 B의 공액, $C: H_2 \to H_2$는 선형대칭정의반정값행렬이라고 가정하자. 그리고 $f \in H_1,\ g \in H_2$들은 주어지고 $x \in H_1,\ y \in H_2$들은 미지수들이다.

선행연구[4]에서는 안장점문제($C=0$)에 대한 우자와형알고리듬과 변형들을 제기하고 수렴성해석을 진행하였다. 선행연구[2]에서는 선행처리기들을 리용한 비정확한 우자와알고리듬을 제기하고 선행처리기의 선택방법을 론의하였으며 콜레스키분해에 의한 선행처리공액경사법을 리용한 알고리듬을 구성하고 수렴성해석을 진행하였다. 선행연구[1]에서는 일반화된 안장점문제($C \neq 0$)에 대한 우자와형반복법들을 제기하고 수렴성해석을 진행하였다. 선행연구[3]에서는 일반화된 안장점행렬의 고유값평가에 대하여 론의하였다.

선행연구[1]에서 제기된 알고리듬들과 수렴성정리들은 다음과 같다.

알고리듬 1 $x_0 \in H_1,\ y_0 \in H_2$에 대하여 반복렬 $\{(x_i,\ y_i)\}$는 $i = 0,\ 1,\ \cdots$에 대하여

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + Q_A^{-1}(f - (Ax_i + B^{\mathrm{T}} y_i)) \\ y_{i+1} = y_i + Q_B^{-1}(Bx_{i+1} - Cy_i - g) \end{cases} \tag{2}$$

로 주어진다. 여기서 선행처리기 Q_B는

$$((BA^{-1}B^{\mathrm{T}} + C)v,\ v) \le (Q_B v,\ v)\ \ (\forall v \in H_2) \tag{3}$$

를 만족시킨다.

식 (3)으로부터 $\gamma \in [0,\ 1)$에 대하여

$$(1-\gamma)(Q_B v,\ v) \le ((BA^{-1}B^{\mathrm{T}} + C)v,\ v)\ \ (\forall v \in H_2) \tag{4}$$

이다. 또한 선행처리기 Q_A는

$$(Av,\ v) \le (Q_A v,\ v)\ \ (\forall v \in H_1,\ v \neq 0) \tag{5}$$

를 만족시킨다. 식 (5)로부터

$$(1-\delta)(Q_A v,\ v) \le (Av,\ v) \ \ (\forall v \in H_1) \tag{6}$$

를 만족시키는 $\delta \in [0,\ 1)$ 이 존재한다. $Q_A - A$ 와 Q_B 가 대칭정의정값행렬이므로 $H_1 \times H_2$ 에서 스칼라적을 다음과 같이 정의한다.[2]

$$\left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}\right] = \left(\begin{pmatrix} Q_A - A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}\right) \equiv ((Q_A - A)u,\ r) + (Q_B v,\ s)$$

정리 1 식 (3), (5)가 성립하고 γ 와 δ 는 각각 식 (4), (6)을 만족시킨다고 하자. $\{x,\ y\}$ 는 식 (1)에 대한 풀이, $\{(x_i,\ y_i)\}$ 는 알고리듬 1에 의한 근사풀이라고 하고

$$e_i = \begin{pmatrix} x - x_i \\ y - y_i \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} e_i^x \\ e_i^y \end{pmatrix},\ [|q|]^2 = [q,\ q]$$

로 놓자. 그러면 $i = 0,\ 1,\ \cdots$ 에 대하여

$$[|e_i|] \le \rho^i [|e_0|],\ \ \rho = (\gamma(1-\delta) + \sqrt{\gamma^2(1-\delta)^2 + 4\delta})/2$$

가 성립한다. A 의 비선형근사거꿀을 넘기기 $\Psi: H_1 \to H_1$ 로 정의한다. $\varphi \in H_1$ 에 대하여 $\Psi(\varphi)$ 는 $A\xi = \varphi$ 의 풀이 ξ 에 대한 근사이다. 이 근사가 어떤 $\delta < 1$ 에 대하여

$$\|\Psi(\varphi) - A^{-1}\varphi\|_A \le \delta \|\varphi\|_{A^{-1}} \ \ (\forall \varphi \in H_1) \tag{7}$$

을 만족시킨다고 하자.

알고리듬 2 $x_0 \in H_1,\ y_0 \in H_2$ 에 대하여 반복렬 $\{(x_i,\ y_i)\}$ 는 $i = 0,\ 1,\ \cdots$ 에 대하여

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \psi(f - (Ax_i + B^{\mathrm{T}} y_i)) \\ y_{i+1} = y_i + Q_B^{-1}(Bx_{i+1} - Cy_i - g) \end{cases} \tag{8}$$

이다.

정리 2 식 (3), (7)이 성립하고 γ 는 식 (4)를 만족시킨다고 하자. $\{x,\ y\}$ 는 식 (1)에 대한 풀이이고 $\{(x_i,\ y_i)\}$ 는 알고리듬 2에 의한 근사풀이라고 하자. 그러면 x_i 와 y_i 는 $\delta < (1-\gamma)/(3-\gamma)$ 일 때 각각 x 와 y 에로 수렴한다. 이 경우에 다음의 부등식들이 성립한다.

$$\frac{\delta}{1-\delta}(Ae_i^x,\ e_i^y) + (Q_B e_i^x,\ e_i^y) \le \rho^{2i}\left(\frac{\delta}{1-\delta}(Ae_0^x,\ e_0^y) + (Q_B e_0^x,\ e_0^y)\right)$$

$$(Ae_i^x,\ e_i^y) \le (1+\delta)(1+2\delta)\rho^{2i-2}\left(\frac{\delta}{1-\delta}(Ae_0^x,\ e_0^y) + (Q_B e_0^x,\ e_0^y)\right)$$

여기서

$$\rho = (2\delta + \gamma + \sqrt{(2\delta+\gamma)^2 + 4\delta(1-\gamma)})/2$$

수렴성정리와 수치실험결과는 알고리듬 2가 알고리듬 1의 수렴속도를 개선하지 못한다는것을 보여준다.

론문에서는 비정확한 우자와알고리듬의 수렴속도를 개선하기 위하여 슈르분해선행처리기를 리용한 한가지 비선형알고리듬을 제기하고 수렴성을 증명하며 수치실험을 통하여 제기된 방법의 효과성을 검증하였다.

2. 새로운 비선형우자와알고리듬

알고리듬 2는 안장점문제 (1)에 대한 슈르분해련립방정식

$$(BA^{-1}B^{\mathrm{T}}+C)y=(BA^{-1}f-g)$$

를 풀기 위한 리차드손반복이다. 만일 연산자 $S\equiv BA^{-1}B^{\mathrm{T}}+C$ 가 매우 나쁜 조건을 가지지 않았다면 $\tau\approx\tau_{opt}\equiv 2/(\lambda_M+\lambda_m)$ 로 취하여 수렴성을 개선할수 있다. 슈르분해연산자는 비선형선행처리기로 리용하기 편리하다. 수렴성을 가속시키기 위하여 다른 비선형우자와알고리듬 즉 슈르분해의 거꿀 $(BA^{-1}B^{\mathrm{T}}+C)^{-1}$ 의 비선형근사를 리용한다.

알고리듬 3 $x_0\in H_1,\ y_0\in H_2$ 에 대하여 반복렬 $\{(x_i,\ y_i)\}$ 는 $i=0,\ 1,\ \cdots$ 에 대하여

$$\begin{cases}x_{i+1}=x_i+Q_A^{-1}(f-(Ax_i+B^{\mathrm{T}}y_i))\\ y_{i+1}=y_i+\psi(Bx_{i+1}-Cy_i-q)\end{cases}\tag{9}$$

이다. $\varphi\in H_2$ 에 대하여 $\psi(\varphi)$ 는 근사슈르분해련립방정식 $(BQ_A^{-1}B^{\mathrm{T}}+C)\xi=\varphi$ 의 풀이 ξ 에 대한 근사이다. 이 근사가 어떤 $\varepsilon<1$ 에 대하여

$$\|\psi(\varphi)-(BQ_A^{-1}B^{\mathrm{T}}+C)^{-1}\varphi\|_{(BQ_A^{-1}B^{\mathrm{T}}+C)}\le\varepsilon\|\varphi\|_{(BQ_A^{-1}B^{\mathrm{T}}+C)^{-1}}\tag{10}$$

을 만족시킨다고 하자.

정리 3 식 (5), (6), (10)들이 성립한다고 하자. $\{x,\ y\}$ 가 식 (1)에 대한 풀이이고 $\{(x_i,\ y_i)\}$ 를 알고리듬 3에 의한 근사풀이라고 하자. 그러면 $x_i,\ y_i$ 는

$$\delta<1/2,\ \ \varepsilon<1-2\delta\tag{11}$$

일 때 각각 x 와 y 에로 수렴한다. 이 경우에 다음의 부등식들이 성립한다.

$$\delta(1+\varepsilon)(Q_Ae_i^x,\ e_i^y)+((BQ_A^{-1}B^{\mathrm{T}}+C)e_i^x,\ e_i^y)\le\rho^{2i}(\delta(1+\varepsilon)(Q_Ae_0^x,\ e_0^y)+((BQ_A^{-1}B^{\mathrm{T}}+C)e_0^x,\ e_0^y))\tag{12}$$

$$(Q_Ae_i^x,\ e_i^y)\le(1+\delta/(1+\varepsilon))\rho^{2i-2}(\delta(1+\varepsilon)(Q_Ae_0^x,\ e_0^y)+((BQ_A^{-1}B^{\mathrm{T}}+C)e_0^x,\ e_0^y))\tag{13}$$

여기서

$$\rho=\left(\delta+\varepsilon+\sqrt{(\delta+\varepsilon)^2+4\delta}\right)/2\tag{14}$$

이다.

3. 수치실험결과

고찰하려는 문제는 다음과 같다.

$$\begin{cases}-\upsilon\Delta u+\operatorname{grad}p=f\in\Omega\\ \operatorname{div}u=0\in\Omega\end{cases}\tag{15}$$

여기서 $\Omega=[0,\ 1]\times[0,\ 1]$ 이고 경계조건은 $u_x=u_y=0\ \ (x=0,\ y=0,\ x=1)$ 이고 $u_x=1,\ u_y=0$ $(y=1)$ 이다. 식 (15)를 리산화하기 위해 정방형요소들의 $n\times n$ 평등그물에 기초한 유한요소부분분할을 선택한다. 리산련립방정식의 결수행렬 $\boldsymbol{A}$ 는 다음과 같다.($\upsilon=1,\ h=1/n$)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}A & B^{\mathrm{T}}\\ B & -C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{A} & \mathbf{0} & B_1^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{0} & \hat{A} & B_2^{\mathrm{T}}\\ B_1 & B_2 & -C\end{pmatrix}$$

여기서

$$\hat{A}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4&-1&-1&-2\\-1&4&-2&-1\\-1&-2&4&-1\\-2&-1&-1&4\end{pmatrix},\ B_1=\frac{h}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$B_2=\frac{h}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\ C=h^2\begin{pmatrix}2&-1&-1&0\\-1&2&0&-1\\-1&0&2&-1\\0&-1&-1&2\end{pmatrix}$$

알고리듬 1에서는 선행처리기 Q_A를 A의 불완전콜레스키분해 즉 $Q_A=LL^{\mathrm{T}}$로, $Q_B^{-1}=\tau I$로 놓았다. 여기서 $\tau\approx 2/\lambda_{\max}$이고 $\lambda_{\max}$는 제곱법으로 얻은 $B(LL^{\mathrm{T}})^{-1}B^{\mathrm{T}}+C$의 최대고유값이다.

알고리듬 2에서는 $Q_B=I$이고 ψ는 선행처리기가 $Q_A=LL^{\mathrm{T}}$인 PCG법의 한걸음으로 정의된다. 알고리듬 3에서 ψ는 슈르분해련립방정식

$$(B(LL^{\mathrm{T}})^{-1}B^{\mathrm{T}}+C)y_{i+1}=Bx_{i+1}-Cy_i-g$$

에 적용된 CG법의 한걸음으로 정의되고 $Q_A=LL^{\mathrm{T}}$이다.

표에서는 분할에 따르는 3개의 알고리듬들의 반복회수를 보여준다. 반복중단조건은 $\|r^{(k)}\|_2/\|r^{(0)}\|_2\le 10^{-6}$이다.

표. 분할에 따르는 3개의 알고리듬들의 반복회수

방법\분할	8×8	16×16	32×32	64×64
알고리듬1	153	207	230	736
알고리듬2	259	605	756	1 289
알고리듬3	74	104	120	214

참 고 문 헌

[1] M. Z. Zhu et al.; Applied Mathematics and Computation, 250, 463, 2015.

[2] S. Q. Shen et al.; J. Comput. Appl. Math., 233, 2235, 2010.

[3] Z. Z. Bai; J. Comput. Appl. Math., 237, 295, 2013.

[4] J. H. Bramble et al.; SIAM J. Numer. Anal., 34, 1072, 1997.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

A Nonlinear Uzawa Algorithm for Generalized Saddle Point Problems

Hwang Myong Gun, *Pak Yong Song* and *Han Ryu Gyong*

We propose a nonlinear algorithm for generalized saddle point problems to accelerate the convergence of the inexact Uzawa algorithm, and prove its convergence. Also, we show the effectiveness of the proposed method by a numerical example.

Key words: saddle point problem, Uzawa algorithm

김일성종합대학학보 수 학
주체108(2019)년 제65권 제4호

얼굴화상의 기미검출에서 지지벡토르기계의 특징을 합리적으로 선택하기 위한 한가지 방법

김광천, 리명철

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《우리는 과학기술을 발전시키는데서 남들이 걸은 길을 따라만 갈것이 아니라 단계를 뛰여넘어 비약적인 발전을 이룩하여야 합니다.》

론문에서는 얼굴화상에서 기미를 검출할 때 오유률을 증가시키는 머리칼령역에 대한 판정오차를 줄이기 위한 방법을 연구하였다. 우리는 기미령역을 판정하는데 지지벡토르기계(SVM)를 분류기로 리용하였으며 분류기의 판별성능을 높이기 위하여 특징을 합리적으로 선택하는 한가지 방안을 제안하였다.

선행연구[1]에서는 기미를 포함하는 피부령역과 기미가 없는 피부령역을 판단하는데 SVM분류기를 리용하였으며 특징으로는 회색준위동시발생행렬(GLCM)에 기초한 피부질평가를 위한 통계량들을 리용하였으나 머리칼이 없는 얼굴의 특정령역에서의 기미검출에 대하여 론의하고 머리칼령역이 기미검출에 미치는 영향에 대하여 론의하지 못하였다.

선행연구[2]에서는 려파기출력화상에 대하여 턱값판정방법을 리용하여 2진화상처리를 진행하고 련결성분의 크기에 기초하여 기미여부판단을 한다. 그러나 이 방법은 화상의 미세한 변화에도 큰 영향을 받으며 특히 머리칼령역이 기미로 잘못 검출되는것과 같은 오유가 있다. 여기서도 얼굴령역에 머리칼이 없는 얼굴화상자료기지에 대하여 성능평가를 진행하고있다.

우리는 머리칼이 얼굴령역의 일부를 가리우거나 드리우는데 대한 제한을 주지 않은 상태에서 기미령역을 검출하는 방법을 연구하였다. 이때의 문제점은 머리칼부분이 기미령역으로 잘못 판단되는것이다.

기미판정에서의 오유는 기미령역을 기미가 없는 령역으로 판단하는 1종의 오유와 기미가 없는 령역을 기미령역으로 판단하는 2종의 오유가 있다.

우리는 머리칼이 있는 얼굴령역에 대하여 두가지 종류의 오유를 모두 감소시키면서도 2종의 오유를 감소시키는데 더 큰 비중을 두고 성능을 높이기 위한 방법을 연구하였다.

우리는 선행연구[2]의 방법과 류사한 방법으로 기미후보를 얻지만 턱값판정조건을 약화시켜 상대적으로 많은 후보를 얻은 다음 SVM분류기로 후보가 기미령역인가를 판정하는 방법을 제안하였으며 이때 기미없는 머리칼령역이 기미령역으로 판정되는 오유를 줄일수 있는 특징선택방법을 제안하고 실험결과를 주었다.

우리는 SVM분류기를 학습시키기 위한 자료를 머리칼과 기미가 있는 령역 G_1, 머리칼이 있고 기미가 없는 령역 G_2, 머리칼이 없고 기미가 있는 령역 G_3, 머리칼과 기미가 없는 령역 G_4와 같이 4가지로 세분하였다.

이 4가지 표본들중에서 G_1, G_3과 G_2, G_4를 판별하는 분류기를 만들어야 한다.

특징은 선행연구[1]에서와 같이 피부특성을 나타내는 통계적특징을 밝기, Cr, angleA의 색공간에서 구한 42개 특징중에서 기미가 없는 머리칼령역이 기미로 판단되는 오유를 줄이는데 좋은 특징들만을 선택하여 리용하였다. 특징은 G_2 와 G_3 에 대하여 무리안에서는 변동이 작고 무리사이에는 변동이 큰 특성을 가지는것을 우선적으로 선택하는 방법으로 정하였다.

i 번째 특징의 무리 X 와 무리 Y 에 대한 $F-$득점[3]은

$$F(i)^{(X,\ Y)}=\frac{(\bar{x}_i^{(X)}-\bar{x}_i^{(X\cup Y)})^2+(\bar{x}_i^{(Y)}-\bar{x}_i^{(X\cup Y)})^2}{(\sigma_i^{(X)})^2+(\sigma_i^{(Y)})^2}$$

과 같이 계산한다. 여기서 $\bar{x}_i^{(X)}$ 와 $\sigma_i^{(X)}$ 는 각각 무리 X 에서 i 번째 특징의 평균과 표준편차이고 $X\cup Y$ 는 무리 X 와 Y 의 합이다.

실례로 $|G_k|=n_k\ \ (k=1, \cdots, 4)$ 라고 놓았을 때 무리 G_1 의 평균과 표준편차, 무리 $G_1\cup G_2$ 의 평균은 각각 다음과 같이 계산된다.

$$\bar{x}_i^{(G_1)}=\frac{1}{n_1}\left(\sum_{j=1}^{n_1}x_{ij}^{(G_1)}\right),\ \ \sigma_i^{(G_1)}=\sqrt{\frac{1}{n_1}\left(\sum_{j=1}^{n_1}(x_{ij}^{(G_1)}-\bar{x}_i^{(G_1)})^2\right)},\ \ \bar{x}_i^{(G_1\cup G_2)}=\frac{1}{n_1+n_2}\left(\sum_{j=1}^{n_1}x_{ij}^{(G_1)}+\sum_{j=1}^{n_2}x_{ij}^{(G_2)}\right)$$

우리는 특징을 합리적으로 선택하기 위하여 표본들을 4가지로 세분한 기초우에서 득점을 계산하였다.

오유률을 분석해보면 G_2 에 속하는 령역을 기미로 잘못 분류하는것이 많은 비중을 차지하므로 G_2 와 기미를 나타내는 G_1 , G_3 사이의 $F-$득점을 리용하여 새로운 득점을 $FF(i)=w_1F(i)^{(G_2,\ G_1)}+w_2F(i)^{(G_2,\ G_3)}$ 과 같이 계산한다. 여기서 w_1 과 w_2 는 G_2 , G_1 에 대한 득점과 G_2 , G_3 에 대한 득점에 각각 어느 정도의 무게를 주겠는가를 나타내는 무게결수이다.

론문에서는 G_2 와 G_3 을 잘 분리하도록 하는데 보다 큰 의의를 부여하고 최적의 w_1 과 w_2 를 찾을 때 w_2 를 w_1 보다 크게 설정하였다. 이 득점에 기초하여 42개의 특징으로부터 n 개의 특징을 선택하는 방법은 다음과 같다.

① 검사자료에서 계산된 특징으로부터 득점계산을 진행하고 감소순서를 정한다.

② 순서화된 특징들에 대하여 앞에서부터 몇개를 취한것들중에서 분류성능이 가장 높은것을 선택한다. 다시말하면 검사자료에서 특징 f_i 로부터 득점 $FF(i)$ 를 계산하고 특징들을 득점의 감소순서로 순서화한것을 $g_1,\ g_2,\ \cdots,\ g_{42}$ 라고 하며 특징 $g_1,\ g_2,\ \cdots,\ g_k$ 에 대하여 4겹교차확인을 진행하고 정확도를 a_k 라고 한다. $n=\arg\min_k a_k$ 라고 하면 최종특징으로 $g_1,\ g_2,\ \cdots,\ g_n$ 을 선택한다.

이때 매 특징의 득점은 계산된 후 크기비교에만 참가하므로 전체를 w_1 로 나누고 $w=w_2/w_1$ 를 리용하면 특징득점은 w 만을 가지고 $FF(i)=F(i)^{(G_2,\ G_1)}+wF(i)^{(G_2,\ G_3)}$ 과 같이 계산하면 된다.

우의 방법으로부터 특정한 w 에 대한 최적의 특징모임을 얻으며 w 를 일정한 범위에서 변화시키면서 오유가 최소로 되는 무게결수를 얻는다.

세분을 진행하지 않고 기미와 기미가 아닌 무리에 대한 $F-$득점[3]을 리용할 때와 비교하자.

분류의 정확도는 $ACC=(N_{t13}+N_{t24})/(N_{13}+N_{24})$, 1종의 오유는 $ERR_A=N_{f13}/N_{13}$으로 계산되며 2종의 오유는 $ERR_B=N_{f24}/N_{24}$로 계산된다. 여기서 N_{13}은 기미표본의 개수로서 G_1, G_3에 속하는 표본의 개수 즉 n_1+n_3과 같다. N_{f13}은 실지로는 기미인데 기미가 아니라고 판별된 표본의 개수이고 N_{t13}은 실지로 기미인데 기미로 정확히 판별한 개수이다. 그리고 N_{24}는 기미가 아닌 표본의 개수로서 n_2+n_4와 같다. N_{f24}는 실지로 기미가 아닌데 기미로 판별된 표본의 개수이고 N_{t24}는 기미가 아닌것으로 정확히 판별된 개수이다.

그런데 론문에서는 기미가 아닌 머리칼령역이 기미령역으로 판별되는데 주목하고있으므로 2종의 오유는 $ERR_B_alt=N_{f2}/N_2$로 평가한다. 여기서 $N_2=|G_2|=n_2$이고 N_{f2}는 실지로 기미가 아닌 머리칼령역인데 기미로 판별되는 개수이다.

실험결과를 비교하면 표와 같다.

표. 비교결과

	ACC	ERR_A	ERR_B_alt
제안한 방법	0.839	0.242	0.204
선행방법[3]	0.775	0.251	0.330

표에서 보는바와 같이 론문에서 제안한 방법은 선행연구[3]의 방법보다 분류의 정확도가 더 높고 2종의 오유가 줄어든다는것을 알수 있다.

참 고 문 헌

[1] C. Y. Chang et al.; Dermatological Sciences and Applications, 3, 28, 2013.
[2] C. C. Hsieh et al.; Journal of Computers, 10, 1, 12, 2015.
[3] C. Y. Chang et al.; Pattern Recognition, 43, 10, 3494, 2010.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

A Method to Select Features of Support-Vector-Machine Reasonably for Spot Detection from Facial Images

Kim Kwang Chon, Ri Myong Chol

We select features from gray level co-occurrence matrix reasonably to get higher classification accuracy when we detect spots from facial images including hair by Support-Vector-Machine.

Key words: spot detection, feature selection

김일성종합대학학보 수 학
주체108(2019)년 제65권 제4호

결합 및 합차그라프에서의 생성나무개수평가

우 승 식

정점모임이 서로 비교차하는 두 그라프 $G_1=(V_1,\ E_1)$과 $G_2=(V_2,\ E_2)$에 대하여 정점모임은 $V_1 \cup V_2$이고 릉모임은 $E_1 \cup E_2 \cup E(V_1,\ V_2)$인 새로운 그라프를 G_1과 G_2의 결합그라프라고 부르고 $G=G_1 \oplus G_2$로 표시한다. 여기서 $E(V_1,\ V_2)=\{(i,\ j) \mid i \in V_1,\ j \in V_2\}$이다.

그라프 G의 두 정점 $u,\ v$사이 릉의 개수를 정점쌍 $(u,\ v)$의 다중도 또는 릉 $(u,\ v)$의 다중도라고 부르고 $l_G(u,\ v)$로 표시한다.

두 정점 $u,\ v$사이 릉이 있을 때 그 릉의 다중도가 1인 그라프를 단순그라프, 그렇지 않은 그라프를 다중그라프라고 부른다. 두 정점 $u,\ v$사이 릉이 있으면 이 릉들의 다중도가 모두 m인 그라프를 $m-$다중그라프라고 부르고 G^m으로 표시한다. 그리고 G의 정점 v에 이웃하고있는 릉의 개수를 이 정점의 차수라고 부르고 $d_G(v)$로 표시한다.

두 그라프 $G_1=(V_1,\ E_1)$과 $G_2=(V_2,\ E_2)$에 대하여 정점모임은 $V=V_1 \cup V_2$이고 릉모임 E는 $vu \in E \Leftrightarrow vu \in E_1$ 혹은 $vu \in E_2$인 그라프를 G_1과 G_2의 합그라프라고 부르고 $G=G_1+G_2$로 표시하며 G_2가 G_1의 부분그라프일 때 정점모임은 $V=V_1$이고 릉모임 $E=E_1-E_2$인 그라프 G를 G_1과 G_2의 차그라프라고 부르고 $G=G_1-G_2$로 표시한다.

$n-$정점다중그라프 G에 대하여 $a_{ij}:=\begin{cases} 0, & i=j \\ l_G(v_i,\ v_j), & i \neq j \end{cases}$ $\left(d_{ij}:=\begin{cases} d_G(v_i), & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \right)$와 같은 n차행렬 $A(G)=(a_{ij})_{n,\ n}$ $(D(G)=(d_{ij})_{n,\ n})$을 G의 이웃행렬(차수행렬)이라고 부른다.

선행연구[2]에서는 임의의 $n-$정점다중그라프 G에 대하여 키르히호프행렬인 n차행렬 $L(G)=D(G)-A(G)$의 임의의 주대각선원소에 대한 여소행렬식은 서로 같으며 그 값이 G의 생성나무개수와 같다는것을 밝혔으며 선행연구[1]에서는 다중결합그라프 $K_{p,\ q}^m \oplus G$에서의 생성나무개수를, 선행연구[3]에서는 차그라프 K_n-G에서 G가 완전다조그라프인 경우 생성나무개수를, 선행연구[4]에서는 행렬나무정리를 리용하여 $m-$중그라프 $K_n^m+\alpha G$에서의 생성나무개수를, 선행연구[5]에서는 조합적방법으로 완전그라프와 완전2조그라프의 결합그라프에서의 생성나무개수를 평가하였다.

론문에서는 결합 $m-$ 중그라프 $K_n^m \oplus K_{p,\ g}^m$와 임의의 그라프 G와의 합, 차그라프 $(K_n \oplus K_{p,\ q})^m+\alpha G$에서의 생성나무개수를 평가하였다.

G의 정점들이 K_n^m에 n_1개, $K_{p,\ g}^m$의 정점분할모임들에 각각 $p_1,\ q_1$개 있다고 하자.

그리고 $\alpha=-1$인 경우에는 G의 릉다중도가 기껏 m이라고 가정하자.

G의 생성나무개수를 $\upsilon(G)$로 표시한다.

정리 1 그라프 $(K_n \oplus K_{p,\ q})^m+\alpha G$의 생성나무개수 $\upsilon((K_n \oplus K_{p,\ q})^m+\alpha G)$는

$$\upsilon((K_n \oplus K_{p,\ q})^m+\alpha G)=[m(n+p+q)]^{n-n_1-1}[m(n+q)]^{p-p_1} \cdot [m(n+p)]^{q-q_1} \cdot$$
$$\cdot M \det(\alpha L(G)+D((K_{n_1} \oplus K_{p_1,\ q_1})^m)-mW/M)$$

와 같다. 여기서 $D((K_{n_1} \oplus K_{p_1,\ q_1})^m)$ 은 $(K_n \oplus K_{p,\ g})^m$ 에서 G 에 있는 정점들만으로 이루어진 부분그라프의 차수행렬이며 행렬 W 는 다음과 같은 $(n_1 + p_1 + q_1)$ 차행렬이다.

$$W = \begin{vmatrix} PQ-M & \cdots & PQ & P & \cdots & P & Q & \cdots & Q \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ PQ & \cdots & PQ-M & P & \cdots & P & Q & \cdots & Q \\ P & \cdots & P & KP-1 & \cdots & KP-1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P & \cdots & P & KP-1 & \cdots & KP-1 & 1 & \cdots & 1 \\ Q & \cdots & Q & 1 & \cdots & 1 & QK-1 & \cdots & QK-1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q & \cdots & Q & 1 & \cdots & 1 & QK-1 & \cdots & QK-1 \end{vmatrix}$$

$$K := \frac{2n+p+q-n_1-1}{n+p+q},\ Q := \frac{n+p+q-p_1}{n+q},\ P := \frac{n+p+q-q_1}{n+p},\ M := P+Q-QKP$$

증명 $(K_n \oplus K_{p,\ q})^m + \alpha G$ 의 정점들에 다음과 같이 번호를 붙이자.

K_n 의 정점들가운데서 G 에 들어있지 않는 $n - n_1$ 개의 정점들을 먼저 번호화한 다음 $K_{p,\ q}$ 의 정점들가운데서 G 에 들어있지 않는 $p - p_1$ 개의 정점들, 다음 $q - q_1$ 개의 정점들을 번호화한다. 다음으로 G 에 들어있는 정점들로서 K_n 에 들어있는 n_1 개의 정점들을 먼저 번호화하고 다음 $K_{p,\ q}$ 에 들어있는 $p_1,\ q_1$ 개의 정점들을 차례로 번호화한다.

그러면 $(K_n \oplus K_{p,q})^m + \alpha G$ 의 키르히호프행렬은 $(n+p+q)$ 차행렬로서 다음과 같다.

$$L = L((K_n \oplus K_{p,\ g})^m + \alpha G) =$$

$$= \begin{bmatrix} -m & \cdots & A & -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m \\ -m & \cdots & -m & B & \cdots & 0 & -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & 0 & \cdots & 0 & -m & \cdots & -m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m & \cdots & -m & 0 & \cdots & B & -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & 0 & \cdots & 0 & -m & \cdots & -m \\ -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & C & \cdots & 0 & -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & 0 & \cdots & C & -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & 0 & \cdots & 0 \\ -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & A' & \cdots & m' & m' & \cdots & m' & m' & \cdots & m' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & m' & \cdots & A' & m' & \cdots & m' & m' & \cdots & m' \\ -m & \cdots & -m & 0 & \cdots & 0 & -m & \cdots & -m & m' & \cdots & m' & B' & \cdots & 0 & m' & \cdots & m' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m & \cdots & -m & 0 & \cdots & 0 & -m & \cdots & -m & m' & \cdots & m' & 0 & \cdots & B' & m' & \cdots & m' \\ -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & 0 & \cdots & 0 & m' & \cdots & m' & m' & \cdots & m' & C' & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & 0 & \cdots & 0 & m' & \cdots & m' & m' & \cdots & m' & 0 & \cdots & C' \end{bmatrix}$$

이 행렬에서 $A := m(n+p+q-1)$, $B := m(n+q)$, $C := m(n+p)$ 이고 A', B', C' 는 각각

$$A' := m(n+p+q-1) + \alpha d_G(v_i), \quad B' := m(n+q) + \alpha d_G(v_i), \quad C' := m(n+p) + \alpha d_G(v_i)$$

이며 행렬의 $(i,\ j)$ 위치에 있는 m' 는 $-m - \alpha l_G(v_i,\ v_j)$ 를 나타낸다.

그리고 행렬의 처음의 $n-n_1$ 개의 행과 렬은 K_n 의 $n-n_1$ 개의 정점들에, 그 다음 $p-p_1$, $q-q_1$ 개의 행과 렬은 각각 $K_{p,q}$ 의 $p-p_1$, $q-q_1$ 개의 정점들에, 그다음 n_1, p_1, q_1 개의 행과 렬은 각각 K_n, $K_{p,q}$ 의 n_1, p_1, q_1 개의 정점들에 대응된다.

이 행렬에서 첫번째 행과 렬을 제거하여 얻어진 $(n+p+q-1)$ 차행렬을 L_1 이라고 하면 $(K_n \oplus K_{p,q})^m + \alpha G$ 의 $v((K_n \oplus K_{p,q})^m + \alpha G)$ 는 행렬나무정리에 의하여 $\det L_1$ 과 같다.

이 행렬식의 마지막행에 $(n+p+q)$ 차원벡토르

$$(0,\ \cdots,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 1)$$

을, 마지막렬에 $(n+p+q)$ 차원벡토르

$$(-m,\ \cdots,-m,\ -m,\ \cdots,\ -m,\ -m,\ \cdots,-m,\ -m,\ \cdots,-m,\ -m,\ \cdots,-m,\ -m,\ \cdots,-m,\ 1)^{\mathrm{T}}$$

를 보충하여 얻어진 $(n+p+q)$ 차행렬식 $\det(L_2)$ 도 $\det(L_1)$ 과 같으며 이 행렬식의 마지막렬에 -1 을 곱하고 나머지렬들에 더하여 얻어진 행렬식도 $\det(L_2)$ 와 같다.

우와 같은 방법을 반복하면 다음의 행렬식이 얻어진다.

$$v((K_n \oplus K_{p,\ g})^m + \alpha G) = [m(n+p+q)]^{n-n_1-1}[m(n+q)]^{p-p_1} \cdot [m(n+p)]^{q-q_1} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} A'+m & \cdots & m'' & m'' & \cdots & m'' & m'' & \cdots & m'' & -m & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m'' & \cdots & A'+m & m'' & \cdots & m'' & m'' & \cdots & m'' & -m & 0 & 0 \\ m'' & \cdots & m'' & B' & \cdots & 0 & m'' & \cdots & m'' & 0 & -m & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m'' & \cdots & m'' & 0 & \cdots & B' & m'' & \cdots & m'' & 0 & -m & 0 \\ m'' & \cdots & m'' & m'' & \cdots & m'' & C' & \cdots & 0 & 0 & 0 & -m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m'' & \cdots & m'' & m'' & \cdots & m'' & 0 & \cdots & C' & 0 & 0 & -m \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1-\dfrac{n-n_1-1}{n+p+q} & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1+\dfrac{p-p_1}{n+q} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & -1 & 0 & 1+\dfrac{q-q_1}{n+p} \end{vmatrix}$$

$K := \dfrac{2n+p+q-n_1-1}{n+p+q}$, $Q := \dfrac{n+p+q-p_1}{n+q}$, $P := \dfrac{n+p+q-q_1}{n+p}$, $M := P+Q-QKP$ 로 놓고 행과 렬의 첨가 및 행렬식전개를 반복하면 $M \det(\alpha L(G) + D((K_{n_1} \oplus K_{p_1,\ q_1})^m) - mW/M)$ 가 성립된다.(증명끝)

정리 2　$m-$중그라프 $K_n^m + \alpha G$ 의 생성나무개수 $v(K_n^m + \alpha G)$ 는 다음과 같다.

$$v(K_n^m + \alpha G) = m \cdot (mn)^{n-n_1-2} \det(\alpha L(G) + mnI_{n_1})$$

여기서 n_1은 그라프 G의 정점개수이고 $L(G)$는 그라프 I_{n_1}의 n_1차단위행렬이다.

따름 결합그라프 $K_n \oplus K_{p,q}$의 생성나무개수 $\upsilon(K_n \oplus K_{p,q})$는 다음과 같다.

$$\upsilon(K_n \oplus K_{p,q}) = (n+p+q)^n (n+q)^{p-1} \cdot (n+p)^{q-1}$$

참 고 문 헌

[1] 김일성종합대학학보(자연과학), 61, 12, 7, 주체104(2015).

[2] N. Biggs; Algebraic Graph Theory, Cambridge University Press, 34∼56, 1993.

[3] K. L. Chung et al.; Inform Precess. Lett., 76, 113, 2000.

[4] S. D. Nikolopoulos et al.; Discrete Math. Theor. Comput. Sci., 8, 235. 2006.

[5] U Sung Sik; Electronic Journal of Graph Theory and Applications, 4, 2, 171, 2016.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

Enumeration for the Number of Spanning Trees of the Joined Addition/Subtraction Graph

U Sung Sik

We have enumerated the number of spanning trees of the joined addition/subtraction graph $(K_n^m \oplus K_{p,g}^m) + \alpha G$ by using the matrix tree theorem.

Key words: spanning tree, enumeration

김일성종합대학학보 수 학 주체108(2019)년 제65권 제4호

정화상복원의 한가지 수학적모형에 대한 연구

송 주 혁

정화상복원은 주어진 화상에서 부분적으로 잃어진 정보를 복원하거나 주어진 화상에 있는 불필요한 대상을 삭제하되 화상에 인위적인 부분이 없도록 하는 방법이다.

여기에는 변분문제에 의하여 화상에 들어있는 구조정보를 리용하는 방법, 표본에 의하여 무늬정보를 리용하는 방법, 우의 두 방법에 의거하여 화상의 구조정보와 무늬정보를 동시에 리용하는 방법들이 있다.[1]

한편 등방성 및 비등방성해밀턴－야코비방정식의 수치풀이를 효과적으로 구하기 위한 연구도 심화되고있다.[2]

론문에서는 선행연구들에서 리용된 모형들과 다른 화상복원의 한가지 수학적모형을 제기하였다. 즉 해밀턴－야코비방정식의 점성풀이에 의한 화상평활 및 강조모형을 화상복원에 리용되도록 개조하기 위한 연구를 진행하였다.

해밀턴－야코비방정식의 점성풀이에 의한 화상평활 및 강조모형은 다음과 같다.[3]

$$I_t = h(|\nabla G \times I|) \times \mathrm{cur}\,|\nabla I|$$

론문에서는 ∇I 를 리용하는 한가지 화상평활 및 강조모형을 제안하고 그에 기초하여 화상복원문제를 취급하였다.

$I_0 : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}^+$ 는 주어진 화상이고 $\Omega_0 \subset \Omega$ 는 복원하여야 할 구역이며

$$S(\tilde{I}\ ;\overline{\Omega}) := \{\, I \in C^4(\overline{\Omega},\ \mathbf{R}^+) \mid I = BL(\tilde{I}) + G_\sigma \}$$

라고 하자. 여기서 $BL(\cdot)$ 은 유계선형연산자, G_σ는 가우스잡음, $\tilde{I}$ 은 주어진 화상이 어떤 의미에서 손상되였다고 할 때 손상이 없는 리상적인 화상을 표현한다. 즉 함수족 $S(\tilde{I}\ ;\overline{\Omega})$ 는 리상적인 화상에 손상과 함께 가능한 잡음이 섞인 화상들의 모임으로 볼수 있다.

먼저 화상평활 및 강조문제에 대하여 론의하자.

함수족 $S(\tilde{I}\ ;\overline{\Omega})$ 에서 목적범함수 $J(I)$ 를 $J(I) = \int_\Omega h(|\Delta I|)\, d\Omega + \int_\Omega \theta (I - I_0)^2 d\Omega$ 와 같이 정의한다. 여기서 $h : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ 는 $|\Delta I|$에 관해 부아닌 증가함수이다. $|\Delta I|$는 화상의 평활화정도를 나타내며 θ는 무게상수이다.

$h(\cdot)$이 증가함수이므로 $|\Delta I|$가 클수록 범함수값인 화상의 에네르기는 커지게 된다.

한편 잡음이 제거된 평활화된 화상 I 는 주어진 화상 I_0과 근사할것이 필요하다. 이것은 $J(I)$ 가 I 의 라쁠라시안의 크기에만 관계되면 $|\Delta I| = 0$ 일 때 최소값을 취하게 되며 이때의 화상 $\tilde{I}$ 은 일반적으로 주어진 화상 I_0과 거리가 먼 화상이 될수 있기때문이다.

$J(I)$ 의 둘째 항은 I_0과 $\tilde{I}$ 이 근사할것을 요구한다.

결국 화상평활 및 강조문제는 함수족 $S(\tilde{I}\ ;\overline{\Omega})$ 에서 목적범함수 $J(I)$ 에 최소를 주는 함수 $\tilde{I}$ 을 구하는 극값문제로 귀착된다.

정리 함수 $h:\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$가 엄격증가인 불룩함수라고 할 때 $\tilde{I}$이 $J(I)$에 최소를 주면 $\tilde{I}$은 $I_t + \Delta K(|\Delta I|,\ \Delta I) + \theta(I - I_0) = 0$을 만족시킨다. 여기서 $\Delta K(|\Delta I|,\ \Delta I) = c(|\Delta I|)\cdot\Delta I$이고 $c(\cdot)$은 $|\Delta I|$에 관한 함수이다.

증명 $h(\cdot)$이 불룩함수라는 사실로부터

$$h(\lambda|\Delta I_1| + (1-\lambda)|\Delta I_2|) \le \lambda h(|\Delta I_1|) + (1-\lambda)h(|\Delta I_2|),\ \ \lambda \in [0,\ 1] \tag{1}$$

을 얻고 민꼽스끼부등식으로부터 다음의 식이 성립된다.

$$|\Delta(\lambda I_1 + (1-\lambda)I_2)| \le \lambda|\Delta I_1| + (1-\lambda)|\Delta I_2| \tag{2}$$

또한 $h(\cdot)$이 증가함수이므로

$$h(|\Delta(\lambda I_1 + (1-\lambda)I_2)|) \le h(\lambda|\Delta I_1| + (1-\lambda)|\Delta I_2|).$$

식 (1), (2)로부터 $h(|\Delta(\lambda I_1 + (1-\lambda)I_2)|) \le \lambda h(|\Delta I_1|) + (1-\lambda)h(|\Delta I_2|)$이므로 이 식의 량변을 적분하면 $h(\cdot)$이 부아닌 함수이므로 다음의 식이 성립된다.

$$\int_\Omega h(|\Delta(\lambda I_1 + (1-\lambda)I_2)|)\,d\Omega \le \lambda\int_\Omega h(|\Delta I_1|)\,d\Omega + (1-\lambda)\int_\Omega h(|\Delta I_2|)\,d\Omega$$

한편

$$[\lambda I_1 + (1-\lambda)I_2 - I_0]^2 \le \lambda(I_1 - I_0)^2 + (1-\lambda)(I_2 - I_0)^2 \tag{3}$$

이 성립되며 식 (3)의 량변을 적분하면 다음과 같다.

$$\int_\Omega [\lambda I_1 + (1-\lambda)I_2 - I_0]^2\,d\Omega \le \lambda\int_\Omega (I_1 - I_0)^2\,d\Omega + (1-\lambda)\int_\Omega (I_2 - I_0)^2\,d\Omega \tag{4}$$

식 (4)의 량변에 θ를 곱하고 식 (3)을 더하면 $J(\lambda I_1 + (1-\lambda)I_2) \le \lambda J(I_1) + (1-\lambda)J(I_2)$를 얻는다.

그러므로 $J(I)$는 불룩이다.

$J(I)$의 피적분함수를 $F(I,\ I_{xx},\ I_{yy}) = h(|\Delta I|) + \theta(I - I_0)^2$, $|\Delta I| = |I_{xx} + I_{yy}|$로 놓으면

$$F_I = 2\theta(I - I_0) \tag{5}$$

이 성립된다.

$$F_{I_{xx}} = h'(|\Delta I|)\cdot\frac{\partial|\Delta I|}{\partial I_{xx}} = h'(|\Delta I|)\cdot\mathrm{sign}(\Delta I),\ \ F_{I_{yy}} = h'(|\Delta I|)\cdot\mathrm{sign}(\Delta I),\ \ \mathrm{sign}(s) = \begin{cases} -1, & s < 0 \\ 0, & s = 0 \\ 1, & s > 0 \end{cases}$$

이제 $\mathrm{sign}(\Delta I) = \begin{cases} \Delta I/|\Delta I|, & \Delta I \ne 0 \\ 0, & \Delta I = 0 \end{cases}$을 리용하면 웃식을 다음과 같이 쓸수 있다.

$$F_{I_{xx}} = F_{I_{yy}} = h'(|\Delta I|)\cdot\Delta I/|\Delta I| \tag{6}$$

따라서 식 (5), (6)으로부터 범함수 $J(I)$에 관한 오일러－라그랑쥬방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\Delta[h'(|\Delta I|)\cdot\Delta I/|\Delta I|] + 2\theta(I - I_0) = 0 \tag{7}$$

$2\theta = \theta_0$, $c(|\Delta I|) = h'(|\Delta I|)\cdot\Delta I/|\Delta I|$로 놓으면 식 (7)을

$$\Delta(c(|\Delta I|)\cdot\Delta I) + \theta_0(I - I_0) = 0$$

과 같이 쓸수 있으며 최속하강법을 적용하면 $I_t = -\Delta[c(|\Delta I|)\cdot\Delta I] - \theta_0(I - I_0)$을 얻고

$$\Delta K(|\Delta I|,\ \Delta I) = c(|\Delta I|)\cdot\Delta I$$

임을 고려하면 정리가 증명된다.(증명끝)

화상복원은 다음과 같은 단계들로 이루어진다.

① 주어진 화상 I_0을 무늬화상과 구조화상으로 분해한다.

정리에서 얻은 화상평활－강조모형을 리용하여 화상 I_0을 평활화한 화상인 구조화상 $\tilde{I}$을 얻는다.

주어진 화상과 구조화상의 차로 얻어지는 무늬화상을 얻는다.

② 무늬화상은 무늬합성알고리듬[1]에 의하여 복원하고 구조화상은 정리에서 얻은 화상평활－강조모형을 리용한 구조복원알고리듬을 리용하여 복원한다.

③ 복원된 무늬화상과 구조화상을 합성하여 복원된 화상을 얻는다.

참 고 문 헌

[1] A. Criminisi et al.; IEEE Trans. Image Processing, 13, 9, 1200, 2004.

[2] R. Glowinski et al.; SIAM J. Sci. Comput., 38, 2, 1195, 2016.

[3] L. Alvarez et al.; SIAM J., Numer. Anal., 29, 845, 1992.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

A Mathematical Model for the Image Inpainting

Song Ju Hyok

We present a mathematical model for the simultaneous filling-in of texture and structure in regions of missing image information.

We propose a new mathematical model that can perform both image smoothing and structure inpainting in all regions to be filled-in.

Key word: image smoothing

김일성종합대학학보 수 학 주체108(2019)년 제65권 제4호

두수준피카드반복법에 기초한 고차원역방향확률미분방정식의 한가지 수치풀이방법

박철규, 김문철

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학연구부문에서는 나라의 경제발전과 인민생활향상에서 전망적으로 풀어야 할 문제들과 현실에서 제기되는 과학기술적문제들을 풀고 첨단을 돌파하여 지식경제건설의 지름길을 열어놓아야 합니다.》

역방향확률미분방정식은 최량조종, 금융수학을 비롯한 여러 분야에서 중요하게 리용되는것으로 하여 효률적인 수치풀이방법에 대한 연구가 널리 진행되고있다.

선행연구[2]에서는 우연결合을 리용한 수치도식을 제기하고 약수렴성을 증명하였으며 선행연구[3]에서는 시공간분할과 $\theta-$도식에 기초하여 분할직경에 관하여 높은 차수로 수렴하는 수치도식을 제기하였다.

선행연구[1]에서는 몽떼-까를로방법과 여러수준피카드반복법에 기초하여 새로운 수치풀이방법을 제기하였는데 이 방법은 계산량이 차원수와 오차의 거꿀에 관하여 다항식정도로 증가하는 도식으로서 100차원이상의 역방향확률미분방정식의 풀이도 충분히 모의할수 있는 방법이다.

론문에서는 선행연구[1]에 기초하여 고차원역방향확률미분방정식의 한가지 수치풀이방법을 제기하였다. 이 방법은 선행연구[1]의 도식과 달리 여러수준피카드반복법이 아니라 두수준피카드반복법을 리용하며 같은 정도의 오차수준에 대하여 계산량이 작은 우점이 있다.

상수 $T>0$에 대하여 $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$가 완비확률공간, $W_t=(W_t^1,\ \cdots,\ W_t^d)^{\mathrm{T}}$를 이우에서 정의된 d차원브라운운동, $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$는 이 브라운운동의 자연려파에 모든 $P-$령모임을 포함하도록 확장한 모임벌증가족이라고 하자.

이때 확률토대 $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P,\ \{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T})$우에서 정의된 마르꼬브형역방향확률미분방정식

$$y_t=\varphi(W_T)+\int_t^T f(s,\ y_s)ds-\int_t^T z_s dW_s,\ t\in[0,\ T] \tag{1}$$

를 론의한다.

두수준피카드반복법에 기초한 수치풀이도식은 다음과 같다.

초기단계 $(n<2)$

$$y_0(t,\ x)=0,\ \ z_0(t,\ x)=0 \tag{2}$$

$$y_1(t,\ x)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\varphi(x+W_{T-t}^{(1,\ i)})+\sum_{j=1}^{Q}w_{1,\ j}f(t_{1,\ j},\ 0)$$

$$z_1(t,\ x)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\varphi(x+W_{T-t}^{(1,\ i)})\frac{W_{T-t}^{(1,\ i)}}{T-t}+\sum_{j=1}^{Q}\frac{w_{1,\ j}}{M}\sum_{i=1}^{M}f(t_{1,\ j},\ 0)\frac{W_{t_{1,\ j}-t}^{(1,\ i)}}{t_{1,\ j}-t} \tag{3}$$

반복단계 ($n \geq 2$)

$$y_n(t,\ x) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} y_{n-1}^i(t,\ x) + \sum_{j=1}^{Q}\frac{w_{n,\ j}}{M}\sum_{i=1}^{M}[f(t_{n,\ j},\ y_{n-1}(t_{n,\ j},\ x+W_{t_{n,\ j}-t}^{(n,\ i)})) - f(t_{n,\ j},\ y_{n-2}(t_{n,\ j},\ x+W_{t_{n,\ j}-t}^{(n,\ i)}))] \tag{4}$$

$$z_n(t,\ x) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} z_{n-1}^i(t,\ x) + \\ + \sum_{j=1}^{Q}\frac{w_{n,\ j}}{M}\sum_{i=1}^{M}[f(t_{n,\ j},\ y_{n-1}(t_{n,\ j},\ x+W_{t_{n,\ j}-t}^{(n,\ i)})) - f(t_{n,\ j},\ y_{n-2}(t_{n,\ j},\ x+W_{t_{n,\ j}-t}^{(n,\ i)}))]\frac{W_{t_{n,\ j}-t}^{(n,\ i)}}{t_{n,\ j}-t} \tag{5}$$

여기서 $W_{s-t}^{(n,\ i)}$ 는 n 번째 반복단계에서 기대값근사를 위하여 리용하는 i 번째 d 차원정규분포우연량을 나타내는데 반복법의 서로 다른 단계에서 리용하는 우연량들은 서로 독립이며 같은 단계에서도 $W_{s-t}^{(n,\ i)}$ 들과 $W_{s-t}^{(n,\ j)}$ 들은 모두 서로 독립이다. $y_{n-1}^i(t,\ x),\ z_{n-1}^i(t,\ x)$ 는 각각 $y_{n-1}(t,\ x),\ z_{n-1}(t,\ x)$ 와 동일분포하는 독립우연량들을 의미한다.

매 단계에서 시간변수에 관한 적분을 Q 점가우스−르쟝드르구적법으로 근사시켰고 $(t_{n,1},\ \cdots,\ t_{n,Q}) \subset [t,\ T]$ 는 구적점들이고 $w_{n,\ j}$ 는 구적점 $t_{n,\ j}$ 에서의 무게결수를 나타낸다.

명제 1 충분히 미끈한 실함수 $g:[a,\ b] \to \mathbf{R}$ 가 $\forall n \in \mathbf{N},\ \forall t \in [0,\ T],\ g^{(2n)}(t) \geq 0$ 을 만족시키면 $\forall q \in \boldsymbol{N},\ \tilde{\int\limits_{[a,\ b]}} g(t)dt = \sum_{j=1}^{q} w_j g(t_j) \leq \int_a^b g(t)dt$ 가 성립된다. 여기서 $\tilde{\int\limits_{[a,\ b]}} g(t)dt = \sum_{j=1}^{q} w_j g(t_j)$ 는 $\int_a^b g(t)dt$ 의 q 차르쟝드르근사이다.

명제 2 $\forall n \in \mathbf{N},\ \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n \leq n! \leq \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n e^{1/12}$

오차평가를 진행하는데 필요한 가정들은 다음과 같다.

가정 1 생성자 $f(s,\ y)$ 는 y 에 관하여 립쉬츠련속이며 $f(s,\ 0)$ 은 유계이다. 즉

$$\exists C_f > 0,\ \forall y_1,\ y_2 \in \mathbf{R},\ \forall s \in [0,\ T],\ |f(s,\ y_1) - f(s,\ y_2)| \leq C_f\,|y_1 - y_2|$$

$$\exists C_0 > 0,\ \forall s \in [0,\ T],\ |f(s,\ 0)| \leq C_0$$

가정 2 종점조건함수 $\varphi(x)$ 는 대역적으로 유계이다. 즉

$$\exists C_\varphi > 0,\ \forall x \in \mathbf{R}^d,\ |\varphi(x)| \leq C_\varphi$$

가정 3 방정식 (1)의 실지풀이 $y(t,\ x)$ 는 대역적으로 유계이다.

$$\exists C_y > 0,\ \forall t \in [0,\ T],\ \ x \in \mathbf{R}^d,\ \ |y(t,\ x)| \leq C_y$$

가정 4 임의의 $t \in [0,\ T],\ x \in \boldsymbol{R}^d$ 에 대하여 $[t,\ T]$ 에서 정의되는 함수

$$F(s) = E[f(s,\ y(s,\ x+W_{s-t}))],\quad G(s) = E[f(s,\ y(s,\ x+W_{s-t}))W_{s-t}/(s-t)]$$

는 s 에 관하여 충분히 미끈하며 그 도함수들도 모두 유계이다. 즉

$$\exists C_d > 0,\ \forall t \in [0,\ T],\ x \in \mathbf{R}^d,\quad \sup_{s\in[t,\ T],\ k\in\mathbf{N}} F^{(k)}(s) \leq C_d,\quad \sup_{s\in[t,\ T],\ k\in\mathbf{N}} G^{(k)}(s) \leq C_d$$

다음의 정리는 근사도식 (2)−(5)의 오차에 대한 평가로서 론문의 기본결과이다.

정리 $(y,\ z)$ 가 역방향확률미분방정식 (1)의 풀이라고 할 때 가정 1−4하에서 도식 (2)−(5)에 의하여 정의되는 근사렬 $(y_n,\ z_n)$ 에 대하여 다음의 평가가 성립된다.

$$[|(y-E^n[y_n])(t,\ x)|] \le nC_3C_d\,Q^{1/2}\left(\frac{e}{8Q}\right)^{2Q} + C_1\left(\frac{C_2}{\sqrt{M}}\right)^{n-1} e^{C_f\sqrt{M}(T-t)(1+1/C_2)} + \frac{C_y(T-t)^n C_f^n}{n!}$$

$$(E^n[(y_n-E^n y_n)^2(t,\ x)])^{1/2} \le C_1\left(\frac{C_2}{\sqrt{M}}\right)^{n-1} e^{C_f\sqrt{M}(T-t)}$$

여기서 직적공간 $(\Omega_n,\ \mathscr{F}_n,\ P_n)=(\underbrace{\Omega\times\Omega\times\cdots\times\Omega}_{n},\ \underbrace{\mathscr{F}\otimes\mathscr{F}\otimes\cdots\otimes\mathscr{F}}_{n},\ \underbrace{P\times P\times\cdots\times P}_{n})$ 우에서의 기대값과 분산을 각각 $E^n[\cdot]$, $\mathrm{Var}^n[\cdot]$으로, $(\Omega_n,\ \mathscr{F}_n,\ P_n)$에서의 L_p－노름을 $\|\cdot\|_{n,\ p}$로 표시한다. $C_1,\ C_2,\ C_3$은 $T,\ C_f,\ C_y,\ C_0,\ C_d$에만 관계되는 상수이다.

증명 $\mu_n(t):=\sup_{x\in\mathbf{R}^d}[|(y-E^n[y_n])(t,\ x)|]$로 정의하면 가정 3으로부터 $\mu_0(t)\le C_y$이며 다음의 식이 성립된다.

$$\begin{aligned}\mu_n(t) \le &\left(\varepsilon_n(t)+C_f\int_{[t,\ T]}^{\sim}\varepsilon_{n-1}(s_1)ds_1+\cdots+C_f^{n-1}\int_{[t,\ T]}^{\sim}\int_{[s_1,\ T]}^{\sim}\cdots\int_{[s_{n-2},\ T]}^{\sim}\varepsilon_1(s_{n-1})ds_{n-1}\cdots ds_1\right)+\\ &+\sum_{k=1}^{n}C_f^k\int_{[t,\ T]}^{\sim}\int_{[s_1,\ T]}^{\sim}\cdots\int_{[s_{k-1},\ T]}^{\sim}\upsilon_{n-k}(s_k)ds_k\cdots ds_1+C_f^n\int_{[t,\ T]}^{\sim}\int_{[s_1,\ T]}^{\sim}\cdots\int_{[s_{n-1},\ T]}^{\sim}\mu_0(s_n)ds_n\cdots ds_1\end{aligned}\tag{6}$$

명제 1, 2로부터 식 (6)의 오른변의 첫 항은 다음의 관계를 만족시킨다.

$$\begin{aligned}&\varepsilon_n(t)+C_f\int_{[t,\ T]}^{\sim}\varepsilon_{n-1}(s_1)ds_1+\cdots+C_f^{n-1}\int_{[t,\ T]}^{\sim}\int_{[s_1,\ T]}^{\sim}\cdots\int_{[s_{n-2},\ T]}^{\sim}\varepsilon_1(s_{n-1})ds_{n-1}\cdots ds_1\le\\ &\le(n-1)Q^{1/2}C_3C_d\left(\frac{e}{8Q}\right)^{2Q}\le nC_3C_d\,Q^{1/2}\left(\frac{e}{8Q}\right)^{2Q}\end{aligned}\tag{7}$$

여기서 $C_3=\dfrac{e^{1/3}\pi^{1/2}}{2}\sup_{k\in\mathbf{N}}\dfrac{T^{2Q+k}}{(2Q+1)\cdots(2Q+k)}<\infty$이다.

한편 함수 e^x의 령점에서의 테일러전개로부터 다음의 식이 성립된다.

$$\forall n\in\mathbf{N},\ \exists\xi<x,\ e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)=\frac{e^{\xi}x^{n+1}}{(n+1)!}\le\frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}$$

식 (6)의 오른변의 둘째 항을 평가하자.

명제 1로부터 다음의 식들이 성립된다.

$$C_f\int_{[t,\ T]}^{\sim}\upsilon_{n-1}(s_1)ds_1\le C_1C_2^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^{n-1}e^{C_f\sqrt{M}(T-t)}\frac{C_f\sqrt{M}(T-t)}{C_2}$$

$$C_f^2\int_{[t,\ T]}^{\sim}\int_{[s_1,\ T]}^{\sim}\upsilon_{n-2}(s_2)ds_2ds_1\le C_1C_2^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^{n-1}e^{C_f\sqrt{M}(T-t)}\frac{(C_f\sqrt{M}(T-t))^2}{2C_2^2}$$

일반적으로 다음의 식이 성립된다.

$$C_f^k\int_{[t,\ T]}^{\sim}\int_{[s_1,\ T]}^{\sim}\cdots\int_{[s_{k-1},\ T]}^{\sim}\upsilon_{n-k}ds_k\cdots ds_1\le C_1C_2^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^{n-1}e^{C_f\sqrt{M}(T-t)}\frac{(\sqrt{M}C_f(T-t))^k}{k!C_2^k}$$

그러므로

$$\sum_{k=1}^{n} C_f^k \int_{[t,\ T]}^{\sim} \int_{[s_1,\ T]}^{\sim} \cdots \int_{[s_{k-1},\ T]}^{\sim} v_{n-k}(s_k)ds_k \cdots ds_1 \le C_1\left(\frac{C_2}{\sqrt{M}}\right)^{n-1} e^{C_f\sqrt{M}(T-t)(1+1/C_2)} \tag{8}$$

마찬가지로 식 (6)의 오른변의 마지막항은 다음의 식을 만족시킨다.

$$C_f^n \int_{[t,\ T]}^{\sim} \int_{[s_1,\ T]}^{\sim} \cdots \int_{[s_{n-1},\ T]}^{\sim} \mu_0(s_n)ds_n \cdots ds_1 \le \frac{C_y(T-t)^n C_f^n}{n!} \tag{9}$$

식 (7)－(9)를 식 (6)에 넣으면

$$\mu_n(t) \le nC_3C_d\, Q^{1/2}\left(\frac{e}{8Q}\right)^{2Q} + C_1\left(\frac{C_2}{\sqrt{M}}\right)^{n-1} e^{C_f\sqrt{M}(T-t)(1+1/C_2)} + \frac{C_y(T-t)^n C_f^n}{n!}$$

이 성립된다.(증명끝)

이와 같이 도식 (2)－(5)는 선행연구[1]에서 제기한 여러수준피카드반복도식과 매우 류사하며 정리 1로부터 선행연구[1]와 같은 수준의 오차를 달성할수 있다는것을 알수 있다. 특히 식 (4), (5)에서 보는바와 같이 $(t,\ x)$에서 n번째 반복결과를 구하기 위해서는 같은 시공간점에서 $n-1$번째 반복결과를 구해야 한다. 이로부터 식 (4)의 오른변에서 두번째 합의 매 항

$$f(t_{n,\ j},\ y_{n-1}(t_{n,\ j},\ x+W_{t_{n,\ j}-t}^{(n,\ i)})) - f(t_{n,\ j},\ y_{n-2}(t_{n,\ j},\ x+W_{t_{n,\ j}-t}^{(n,\ i)}))$$

를 계산할 때 두번째 항은 앞의 항을 계산할 때의 리용값을 그대로 리용할수 있으며 계산량을 훨씬 줄일수 있게 한다.

이로부터 도식 (2)－(5)의 계산량은 차원수와 오차에 관하여 다같이 다항식정도로 증가하며 여러수준피카드반복도식에 비하여 효률적이라는것을 알수 있다.

참 고 문 헌

[1] M. Hutzenthaler et al.; arXiv, 1708.03223, 2017.
[2] J. Ma et al.; Ann. Appl. Probab., 12, 302, 2002.
[3] W. Zhao et al,: SIAM J. Numer Anal., 4, 1369, 2010.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

A Numerical Scheme for High-Dimensional Backward Stochastic Differential Equations Based on Two-Level Picard Iteration

Pak Chol Gyu, Kim Mun Chol

We propose a new numerical scheme for high-dimensional backward stochastic differential equations based on two-level Picard iteration.

Key words: high-dimension, two-level Picard iteration

김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

제한없는 검은통다목적최량화문제의 한가지 풀이알고리듬

김주성, 주광휘

검은통다목적최량화문제를 풀기 위하여 선행연구[2]에서는 믿음구역법을 리용하여 선행연구[1]에서 개발된 직접탐색법보다 성능이 더 좋은 알고리듬을 제기하였으며 이 믿음구역알고리듬에 의하여 얻어지는 근사파레토최량풀이들에 대한 목적함수그라디엔트가 령에로 수렴한다는것을 증명하였다.

론문에서는 목적함수의 개수가 3개이상이고 그것들이 모두 검은통함수인 다목적최량화문제를 풀기 위하여 균형보간모임을 선택하는 최소나무법을 새롭게 내놓고 이에 기초하여 믿음구역법으로 일정한 파레토근사최량풀이모임을 구하는 알고리듬을 제기하였다.

1. 예 비 지 식

n 변수다목적최량화문제

$$\min_{x\in X} F(x)=[f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_p(x)] \tag{1}$$

를 보기로 하겠다. 여기서 X 는 $\mathbf{R}^n$ 의 부분공간이며 $F: X\to\mathbf{R}^p$ 는 벡토르값함수이다.

정의 $W=\{w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_m\}$ 을 X 의 벡토르모임이라고 하자.

우선 이 모임의 영상 $F(W)=\{F(w_1),\ F(w_2),\ \cdots,\ F(w_m)\}$ 에 속하는 매 벡토르의 끝점을 정점으로 하는 완전그라프를 생각하자.

매 릉에 이 릉과 접속된 두 정점사이의 유클리드거리로서 무게를 주자. G 를 이 그라프의 최소생성나무라고 하고 G 의 릉모임을 V 라고 하자.

그리고 $W_i=\{w_k\,|\,(w_k,\ w_i)\in V\}$ 일 때 $\max\limits_{w_k\in W_i} d(w_k,\ w_i)$ 를 G 에 관한 정점 w_i 의 고립도라고 한다.

다음 G 에 관한 매 정점의 고립정도를 모두 계산하고 그 값이 가장 큰 점을 선택한다.

$$\max_{w_k\in W_i} d(w_k,\ w_s)=\max_{j=1,\cdots,m}\ \max_{w_k\in W_i} d(w_k,\ w_j)$$

이때 w_s 를 모임 $W=\{w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_m\}$ 에서의 최소생성나무 G 에 대한 최고고립점이라고 한다.

2. 풀이알고리듬

$B(x,\ \Delta)=\{y\in\mathbf{R}^n : \|y-x\|\le\Delta\}$ 를 중심이 x 이고 반경이 Δ 인 믿음구역, $\Delta^{(k)}(x)$ 를 알고리듬의 k 째 순환에 의하여 결정되는 $x\in X$ 에서의 믿음구역반경이라고 하자.

1) 초기화

보간점의 개수 d, 초기점 $x^{(0)}$, 초기믿음구역반경 $\Delta^{(0)}(x^{(0)})\in(0,\ \Delta_{\max}]$, 그리고 파라

메터들을 $\Delta_{\max}>0$, $\Delta_{\text{tol}}\geq 0$, $\delta>0$, $\eta\in[0,\ 1)$, $\tau_{dec}\in(0,\ 1)$, $\tau_{inc}>1$, $\mu>\beta>0$, $\omega\in(0,1)$, $k=1$ 로 설정한다. 다음 $F(x^{(0)})=[f_1(x^{(0)}),\ f_2(x^{(0)}),\ \cdots,\ f_p(x^{(0)})]$ 을 구하고 $X^{(0)}=\{x^{(0)}\}$ 으로 놓는다.

2) 순환단계

걸음 1 (반복결정)

$X^{(k-1)}$ 에서의 최대고립점 $x_c^{(k)}$ 을 결정하고 믿음구역반경을 $\Delta^{(k-1)}(x_c^{(k)})$ 라고 하자.

기준점을 $r^{(k)}=F(x_c^{(k)})$ 로 놓고 $Y^{(k)}=\phi$, $\Delta_0^{(k)}=\Delta^{(k-1)}(x_c^{(k)})$ 로 정한다.

걸음 2 매 순환 $j=1,\ 2,\ \cdots$ 에 대하여

① 2차회귀모형

$\tilde{\Delta}^{(k)}=\omega^{j-1}\Delta_0^{(k)}$ 로 놓는다. $B(x_c^{(k)},\ \tilde{\Delta}^{(k)})$ 에서 보간모임 $\{y_1^{(j)},\ y_2^{(j)},\ \cdots,\ y_d^{(j)}\}$ 를 결정하고 $f_i^{(k)}$ 의 근사모형 $\tilde{m}_i^{(j)}$ $(i=1,\ \cdots,\ p+1)$ 을 구성한다. 즉

$$\tilde{m}_i^{(j)}(x_c^{(k)}+s)=\tilde{c}_i^{(j)}+s^{\mathrm{T}}\tilde{g}_i^{(j)}+\frac{1}{2}s^{\mathrm{T}}\tilde{H}_i^{(j)}s$$

$$Y^{(k)}\leftarrow Y^{(k)}\bigcup\{y_1^{(j)},\ y_2^{(j)},\ \cdots,\ y_d^{(j)}\}$$

② 특이검사

만일

$$\tilde{\Delta}^{(k)}\leq\max\{\Delta_{\text{tol}},\ \min_{i=1,\cdots,p+1}\mu\|\tilde{g}_i^{(j)}\|,\ i=1,\ \cdots,\ p+1\}$$

이면

$$\Delta_c^{(k)}=\min[\max\{\tilde{\Delta}^{(k)},\ \beta\min_{i=1,\cdots,p+1}\|\tilde{g}_i^{(j)}\|\},\ \Delta_0^{(k)}]$$

로 놓고 걸음 3에로 이행한다. 그렇지 않은 경우에는 j 를 증가시키고 걸음 ①에로 이행한다.

걸음 3 (한목적문제)

$$z_i^{(k)}=\arg\min\{m_i^{(k)}(x):x\in B(x_c^{(k)},\ \Delta_c^{(k)})\}$$

걸음 4 (축소비)

새로 계산된 점들에서의 축소비를 다음과 같이 계산한다. 즉 $y\in Y^{(k)}$ 에 대해서는

$$\rho^{(k)}(y)=\frac{f_{p+1}^{(k)}(x_c^{(k)})-f_{p+1}^{(k)}(y)}{m_{p+1}^{(k)}(x_c^{(k)})-m_{p+1}^{(k)}(z_{p+1}^{(k)})}$$

$z\in\{z_1^{(k)},\ z_2^{(k)},\ \cdots,\ z_{p+1}^{(k)}\}$ 에 대해서는

$$\rho^{(k)}(z)=\frac{f_i^{(k)}(x_c^{(k)})-f_i^{(k)}(z)}{m_i^{(k)}(x_c^{(k)})-m_i^{(k)}(z)}\ \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ p+1)$$

로 계산하고 $x\in X^{(k-1)}$ 에 대해서는 $\rho^{(k)}(x)=\rho^{(k-1)}(x)$ 로 놓는다. 다음 $Y^{(k)}$ 에서 축소비가 충분하지 않은 표본점들은 제거한다. 즉

$$Y^{(k)}\leftarrow\{y\in Y^{(k)}:\rho^{(k)}(y)\geq\eta\}$$

걸음 5 (믿음구역반경의 갱신)

① $y \in Y^{(k)}$ 에 대해서는

$$\Delta^{(k)}(y) \in [\Delta_c^{(k)},\ \min\{\tau_{inc}\Delta_c^{(k)},\ \Delta_{\max}\}]$$

② $z \in \{z_1^{(k)},\ z_2^{(k)},\ \cdots\ z_{p+1}^{(k)}\}$ 에 대해서는

$$\Delta^{(k)}(z) \in \begin{cases} [\Delta_c^{(k)},\ \min\{\tau_{inc}\Delta_c^{(k)},\ \Delta_{\max}\}], & \rho^{(k)}(z) \ge \eta \\ [\tau_{dec}\Delta_c^{(k)}], & \rho^{(k)}(z) < \eta \end{cases}$$

③ $x \in \chi^{(k-1)}$ 에 대해서는

$$\Delta^{(k)}(x) \in \begin{cases} \Delta_c^{(k)}, & x = x_c^{(k)} \\ \Delta^{(k-1)}(x), & x \ne x_c^{(k)} \end{cases}$$

로 설정한다.

걸음 6 (비지배모임의 갱신)

벡토르값 $F(x) = [f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_p(x)],\ x \in X^{(k-1)} \bigcup Y^{(k)} \bigcup \{z_1^{(k)},\ z_2^{(k)},\ \cdots,\ z_{p+1}^{(k)}\}$ 들을 비교하고 비지배점모임 $X^{(k)}$ 를 결정한다.

걸음 7 (반복결정)

① 만일 $\max\{\Delta^{(k)}(x) : x \in X^{(k)}\} \ge \Delta_{\text{tol}}$ 이고 $\rho^{(k)}(x) \ge \eta$ 인 $x \in X^{(k)} \setminus X^{(k-1)}$ 가 있으면 k 를 증가시키고 걸음 1에로 이행한다.

② 만일 $\max\{\Delta^{(k)}(x) : x \in X^{(k)}\} \ge \Delta_{\text{tol}}$ 이고 모든 $x \in X^{(k)} \setminus X^{(k-1)}$ 에 대하여 $\rho^{(k)}(x) < \eta$ 이면 $x_c^{(k+1)} = x_c^k,\ \Delta_0^{(k+1)} = \tau_{dec}\Delta_c^{(k)}$ 로 놓고 k 를 증가시킨 다음 걸음 2에로 이행한다.

③ 그렇지 않으면 알고리듬을 끝낸다.

3. 파레토최량성필요조건판정

목적함수 $f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_{p+1}$ 과 그것의 그라디엔트들이 뜻구역에서 립쉬츠련속이라고 가정하자. 초기점 $x^{(0)}$ 과 반경 $\Delta_{\max}$ 에 대하여 수준모임

$$L_i(x^{(0)}) = \{x \in \mathbf{R}^n : f_i(x) \le f_i(x^{(0)})\}\ \ (i = 1,\ \cdots,\ p)$$

$$L(x^{(0)}) = \bigcup_{x \in \bigcup_{i \in 1, \cdots, p} L_1(x^{(0)})} B(x,\ \Delta_{\max})$$

을 생각하고 다음과 같은 가정들을 주겠다.

가정 1 목적함수 $f_i\ (i = 1,\ \cdots,\ p)$ 들과 $f_{p+1}(\cdot\ ;\ r),\ r \in \mathbf{R}^p$ 그리고 그것의 그라디엔트 $\nabla f_i\ (i = 1,\ \cdots,\ p)$ 와 $\nabla f_{p+1}(\cdot\ ;\ r)$ 들이 $L(x^{(0)})$ 을 포함하는 열린모임우에서 립쉬츠련속이다.

가정 2 어떤 정의상수 κ^h 가 존재하여

$$\| H_i^{(k)} \| \le \kappa^h\ \ (\forall i = 1,\ 2,\ \cdots,\ p+1,\ \ k \ge 1)$$

가 성립한다.

가정 3 임의의 $k \ge 1$ 과 $i = 1,\ \cdots,\ p+1$ 에 대하여 어떤 상수 $\kappa_c \in (0,\ 1]$ 이 있어서

$$m_i^{(k)}(x_c^{(k)}) - m_i^{(k)}(z_i^{(k)}) \ge \kappa_c[m_c^{(k)}(x_c^{(k)}) - m_i^{(k)}(z_{i,c}^{(k)})]$$

이 성립한다.

보조정리 1 $z_i^{(k)}$를 $m_i^{(k)}$의 최량풀이라고 하자. 이때 임의의 $k \ge 1$과 $i = 1, \cdots, p+1$에 대하여

$$m_i^{(k)}(x_c^{(k)}) - m_i^{(k)}(z_i^{(k)}) \ge \frac{\kappa_c}{2} \| g_i^{(k)} \| \min\left\{\frac{\| g_i^{(k)} \|}{\kappa^h},\ \Delta_c^{(k)}\right\}$$

가 성립한다.

보조정리 2 $\Delta_{\text{tol}} = 0$이라고 하자. 만일

$$\min_{i=1, \cdots, p+1} \| \nabla f_i^{(k)}(x_c^{(k)}) \| \neq 0$$

이면 알고리듬의 k째 반복에서 걸음 2는 유한번만에 끝난다.

정리 1 가정 1－3이 성립할 때 믿음구역반경은 령에로 수렴한다. 즉

$$\lim_{k \to \infty} \Delta_c^{(k)} = 0$$

정리 2 알고리듬에 의하여 얻어지는 근사파레토최량풀이들가운데서 목적함수들의 그라디엔트가 령에로 수렴하는 부분렬이 존재한다. 즉

$$\liminf_{k \to \infty} \min_{i=1, 2, \cdots, p+1} \nabla f_i(x_c^{(k)}) = 0$$

4. 계 산 실 험

$N = \{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_v\}$를 $|N| = v$인 풀이모임, $F(x_J^*)$ $(j = 1, \cdots, v)$를 $F(x_j)$에 제일 가까운 파레토유효점이라고 하자. 이때 GD는

$$GD = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{v} \| F(x_j) - F(x_j^*) \|^2}}{v}$$

와 같이 계산된다.

다음의 세변수세목적문제

$$f_1(\boldsymbol{x}) = (1 + g(\boldsymbol{x}))\cos\left(x_1 \cdot \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x_2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f_2(\boldsymbol{x}) = (1 + g(\boldsymbol{x}))\cos\left(x_1 \cdot \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(x_2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f_3(\boldsymbol{x}) = (1 + g(\boldsymbol{x}))\sin\left(x_1 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$g(\boldsymbol{x}) = (x_3 - 0.5)^2$$

$$0 \le x_i \le 1 \ \ (i = 1,\ 2,\ 3)$$

을 가지고 알고리듬의 성능을 평가하자.

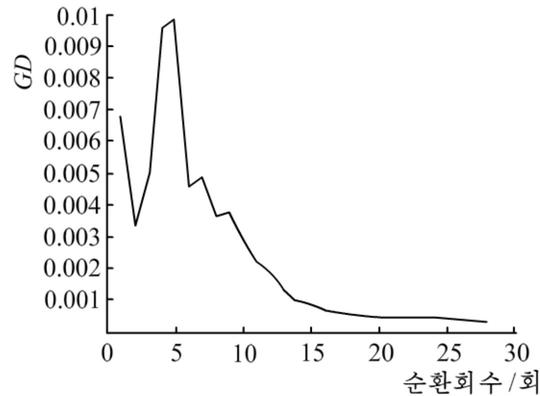


그림. 알고리듬의 순환회수에 따르는 *GD*값의 변화

그림에서 보여준바와 같이 알고리듬의 순환회수에 따르는 *GD*값의 변화를 통하여 우리는 파레토근사풀이모임이 효과적으로 얻어지며 최소생성나무를 리용함으로써 이 풀이모임이 전체 파레토면에로 점차 확산되여간다는것을 알수 있다.

참 고 문 헌

[1] C. Audet et al.; SIAM J. Optim., 19, 1, 188, 2008.
[2] J. Ryu et al.; SIAM J. Optim., 24, 1, 334, 2014.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

An Algorithm for Solution of Unconstrained Black-Box Multiobjective Optimization Problems

Kim Ju Song, Ju Kwang Hwi

In this paper, we propose an algorithm to approximate the Pareto optimal solutions of unconstrained black-box multiobjective optimization problems based on a trust-region approach. The numerical examples validate the efficiency of our method.

Key words: biobjective optimization, multiobjective optimization, trust-region approach

김일성종합대학학보　　　　　　　　　　　　　　　　　주체108(2019)년
수 학　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　제65권　제4호

분수브라운운동에 관한 평균마당역방향확률미분방정식의 풀이의 유일존재성

리경일, 오훈

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《수학교육을 강화하는것은 자라나는 새 세대들의 과학적인 사고능력을 키워주는데서 중요한 의의를 가집니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제10권 478페지)

선행연구[1]에서는 분수브라운운동에 관한 평균마당확률미분방정식의 풀이의 유일존재성과 그것과 관련된 확률조종문제에 대하여, 선행연구[2]에서는 허스트지수가 $H>1/2$인 경우에 대하여 분수브라운운동에 관한 역방향확률미분방정식의 풀이의 유일존재성에 대하여 연구하였다. 선행연구[3]에서는 분수브라운운동에 관한 역방향확률미분방정식의 풀이의 유일존재성에 대한 보다 일반적인 결과와 변분부등식을 얻었다.

론문에서는 분수브라운운동에 관한 평균마당역방향확률미분방정식의 풀이의 유일존재성을 증명하였다.

다음과 같은 분수브라운운동에 관한 평균마당역방향확률미분방정식을 생각하자.

$$\begin{cases} -dY_t = g(t,\ \eta_t,\ Y_t,\ Z_t,\ EY_t,\ EZ_t)dt - Z_t dB_t^{(H)},\ (t\in[0,\ T]) \\ Y_T = h(\eta_T) \end{cases} \tag{1}$$

여기서 $\eta_t=\eta_0+\int_0^t b_s ds+\int_0^t \sigma_s dB_s^{(H)}$ 이다.

방정식의 풀이에 대하여 론의하기 위하여 다음의 모임들을 생각하자.

$$L^2(F_r;\mathbf{R})=\{\xi:\Omega\to\mathbf{R}\,|\,\xi:\ F_r-\text{가측},\ \ E[|\xi|^2]<\infty\}$$

$$C_{\text{pol}}^{1,\ 3}([0,\ T]\times\mathbf{R})=\{\varphi\,|\,C^{1,\ 3}([0,\ T]\times\mathbf{R}),\ \ \varphi\text{의 모든 도함수들이 다항식증가}\}$$

$$M_{[0,\ T]}=\left\{Y=\varphi(\cdot,\ \eta(\cdot))\,|\,\varphi\in C_{\text{pol}}^{1,\ 3}([0,\ T]\times\mathbf{R}),\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial t}\in C_{\text{pol}}^{0,\ 1}([0,\ T]\times\mathbf{R}),\ \ t\in[0,\ T]\right\}$$

그리고 모임 $\tilde{M}_{[0,\ T]}$와 $\tilde{M}_{[0,\ T]}^H$는 각각 모임 $M_{[0,\ T]}$를 노름

$$\|Y\|=\left(E\int_0^T e^{\beta t}\,|Y(t)|^2\,dt\right)^{1/2},\ \ \|Z\|=\left(E\int_0^T t^{2H-1}e^{\beta t}\,|Z(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$

에 관하여 완비화한 모임이다.

가정 1　h는 미분가능하며 다항식증가한다.

가정 2　$g:[0,\ T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$는 다음의 조건을 만족시킨다.

$$\forall t\in[0,\ T],\ \ \forall x,\ y,\ \bar{y},\ z,\ \bar{z},\ u,\ \bar{u},\ v,\ \bar{v}\in\mathbf{R};$$

$$|g(t,\ x,\ y,\ z,\ u,\ v)-g(t,\ x,\ \bar{y},\ \bar{z},\ \bar{u},\ \bar{v})|\le C(|y-\bar{y}|+|z-\bar{z}|+|u-\bar{u}|+|v-\bar{v}|)$$

보조정리 g 가 다항식증가하는 미분가능한 함수이고 f 는 $C_{\text{pol}}^{0,\,1}$ 에 속하는 함수라고 하면 $\begin{cases} -dY_t = f(t,\ \eta_t)dt - Z_t dB_t^{(H)} & (t \in [0,\ T]) \\ Y_T = g(\eta_T) \end{cases}$ 는 유일풀이 $(Y,\ Z) \in \tilde{M}_{[0,\ T]} \times \tilde{M}_{[0,\ T]}^H$ 를 가진다.

정리 가정 1, 2하에서 방정식 (1)은 유일풀이 $(Y,\ Z) \in \tilde{M}_{[0,\ T]} \times \tilde{M}_{[0,\ T]}^H$ 를 가진다.

증명 임의의 $(y_t,\ z_t) \in \tilde{M}_{[0,\ T]} \times \tilde{M}_{[0,\ T]}^H$ 에 대하여 다음의 방정식을 생각하자.

$$\begin{cases} -dY_t = g(t,\ \eta_t,\ y_t,\ z_t,\ Ey_t,\ Ez_t)dt - Z_t dB_t^{(H)} & (t \in [0,\ T]) \\ Y_T = h(\eta_T) \end{cases} \tag{2}$$

보조정리에 의하여 방정식 (2)는 유일풀이 $(Y_t,\ Z_t) \in \tilde{M}_{[0,\ T]} \times \tilde{M}_{[0,\ T]}^H$ 를 가진다.

이제 $I(y_t,\ z_t) = (Y_t,\ Z_t)$ 인 넘기기 $I : \tilde{M}_{[0,\ T]} \times \tilde{M}_{[0,\ T]}^H \to \tilde{M}_{[0,\ T]} \times \tilde{M}_{[0,\ T]}^H$ 를 생각하자.

$n \in \mathbf{N}$ 에 대하여 $t_i = (i-1)T/n \ \ (i = 1,\ \cdots,\ n+1)$ 라고 하자.

먼저 $[t_n,\ T]$ 에서 넘기기 I 가 축소연산자라는것을 증명하자.

임의의 $(y_t,\ z_t) \in \tilde{M}_{[0,\ T]} \times \tilde{M}_{[0,\ T]}^H$ 와 $(\bar{y}_t,\ \bar{z}_t) \in \tilde{M}_{[0,\ T]} \times \tilde{M}_{[0,\ T]}^H$ 에 대하여

$$(Y_t,\ Z_t) = I(y_t,\ z_t),\ \ (\bar{Y}_t,\ \bar{Z}_t) = I(\bar{y}_t,\ \bar{z}_t)$$

라고 하자. 그리고 $(\hat{y}_t,\ \hat{z}_t) = (y_t - \bar{y}_t,\ z_t - \bar{z}_t)$, $(\hat{Y}_t,\ \hat{Z}_t) = (Y_t - \bar{Y}_t,\ Z_t - \bar{Z}_t)$ 로 놓자.

확률적분의 변환공식을 리용하면 $t \in [t_n,\ T]$ 에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$\begin{aligned} & e^{\beta t}\hat{Y}_s^2 + \beta\int_t^T e^{\beta s}\hat{Y}_s^2 ds + 2\int_t^T e^{\beta s} D_s^H \hat{Y}_s \hat{Z}_s ds + \int_t^T e^{\beta s}\hat{Y}_s \hat{Z}_s dB_s^{(H)} = \\ & = 2\int_t^T e^{\beta s}\hat{Y}_s [g(s,\ \eta_s,\ y_s,\ z_s,\ Ey_s,\ Ez_s) - g(s,\ \eta_s,\ \bar{y}_s,\ \bar{z}_s,\ E\bar{y}_s,\ E\bar{z}_s)]ds \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 $D_s^H \hat{Y}_s = \dfrac{\hat{\sigma}_s}{\sigma_s}\hat{Z}_s$ 이며 상수 $K > 0$ 이 있어서 $\dfrac{t^{2H-1}}{K} \le \dfrac{\hat{\sigma}_t}{\sigma_t} \le Kt^{2H-1}\ \ (t \in [0,\ T])$ 이다.

일반성을 잃지 않고 $K > 2$ 를 취하면

$$\begin{aligned} & E\left(e^{\beta t}\hat{Y}_t^2 + \beta\int_t^T e^{\beta s}\hat{Y}_s^2 ds + \frac{2}{K}\int_t^T e^{\beta s} s^{2H-1}\hat{Z}_s^2 ds \right) \le \\ & \le 2\int_t^T e^{\beta s}\hat{Y}_s E[g(s,\ \eta_s,\ y_s,\ z_s,\ Ey_s,\ Ez_s) - g(s,\ \eta_s,\ \bar{y}_s,\ \bar{z}_s,\ E\bar{y}_s,\ E\bar{z}_s)]ds \end{aligned} \tag{4}$$

가정 2에 의하여 식 (4)는 다음과 같이 변형할수 있다.

$$E\left(e^{\beta t}\hat{Y}_t^2 + \beta\int_t^T e^{\beta s}\hat{Y}_s^2 ds + \frac{2}{K}\int_t^T e^{\beta s} s^{2H-1}\hat{Z}_s^2 ds \right) \le 4C\int_t^T e^{\beta s} E(|\hat{Y}_s|(|\hat{y}_s| + |\hat{z}_s|))ds \tag{5}$$

$\beta \ge 1$ 을 취하고 휠데르의 부등식을 리용하면

$$E\left(e^{\beta t}\hat{Y}_t^2 + \beta\int_t^T e^{\beta s}\hat{Y}_s^2 ds + \frac{2}{K}\int_t^T e^{\beta s} s^{2H-1}\hat{Z}_s^2 ds \right) \le 4C\int_t^T (e^{\beta s}E|\hat{Y}_s|^2)^{1/2}(e^{\beta s}E(|\hat{y}_s| + |\hat{z}_s|)^2)^{1/2} ds \tag{6}$$

$u(t)=(e^{\beta t}E|\hat{Y}_t|^2)^{1/2}$ 으로 놓으면 식 (6)으로부터 $u(t)^2 \le 4C\int_t^T u(s)(e^{\beta s}E(|\hat{y}_s|+|\hat{z}_s|)^2)^{1/2}ds$ 가 나온다. 따라서 $u(t)\le 2C\int_t^T (e^{\beta s}E(|\hat{y}_s|+|\hat{z}_s|)^2)^{1/2}ds \le 2\sqrt{2}C\int_t^T (e^{\beta s}E(|\hat{y}_s|^2+|\hat{z}_s|^2))^{1/2}ds$ 이므로

$$u(t)^2 \le 16C^2\left(\int_t^T (e^{\beta s}E(|\hat{y}_s|^2+|\hat{z}_s|^2))^{1/2}ds\right)^2$$

이다. 이 식의 량변을 구간 $[t_n,\ T]$에서 t에 관하여 적분하면 다음과 같다.

$$\int_{t_n}^T u(s)^2 ds \le 16C^2(T-t_n)\left(\int_{t_n}^T (e^{\beta s}E(|\hat{y}_s|^2+|\hat{z}_s|^2))^{1/2}ds\right)^2$$

웃식의 오른변의 크기를 평가하자.

$$\left(\int_{t_n}^T (e^{\beta s}E(|\hat{y}_s|^2+|\hat{z}_s|^2))^{1/2}ds\right)^2 \le \left(\int_{t_n}^T [e^{\beta s}E(|\hat{y}_s|^2)]^{1/2}ds + \int_{t_n}^T [e^{\beta s}E(|\hat{z}_s|^2)]^{1/2}ds\right)^2 \le$$

$$\le 2\left(\int_{t_n}^T [e^{\beta s}E(|\hat{y}_s|^2)]^{1/2}ds\right)^2 + 2\left(\int_{t_n}^T \left[\frac{1}{s^{2H-1}}e^{\beta s}s^{2H-1}E(|\hat{z}_s|^2)\right]^{1/2}ds\right)^2 \le$$

$$\le 2(T-t_n)\int_{t_n}^T e^{\beta s}E(|\hat{y}_s|^2)ds + \frac{2(T^{2-2H}-t_n^{2-2H})}{2-2H}\int_{t_n}^T e^{\beta s}s^{2H-1}E(|\hat{z}_s|^2)ds \le$$

$$\le 2\left[(T-t_n)+\frac{T^{2-2H}-t_n^{2-2H}}{2-2H}\right]E\int_{t_n}^T e^{\beta s}(|\hat{y}_s|^2+s^{2H-1}|\hat{z}_s|^2)ds$$

그러므로

$$\int_{t_n}^T u(s)^2 ds \le G(T-t_n)E\int_{t_n}^T e^{\beta s}(|\hat{y}_s|^2+s^{2H-1}|\hat{z}_s|^2)ds,\quad G=32C^2\left[(T-t_n)+\frac{T^{2-2H}-t_n^{2-2H}}{2-2H}\right] \tag{7}$$

이 성립되며 마찬가지로 다음식이 성립한다.

$$\int_{t_n}^T \frac{1}{s^{2H-1}}u(s)^2 ds \le G\frac{T^{2-2H}-t_n^{2-2H}}{2-2H}E\int_{t_n}^T e^{\beta s}(|\hat{y}_s|^2+s^{2H-1}|\hat{z}_s|^2)ds \tag{8}$$

식 (5)로부터 다음의 식이 성립된다.

$$E\left(\int_{t_n}^T e^{\beta s}|\hat{Y}_s|^2 ds + \frac{2}{K}\int_{t_n}^T e^{\beta s}s^{2H-1}|\hat{Z}_s|^2 ds\right) \le 4CE\int_{t_n}^T e^{\beta s}\left(\frac{1}{\upsilon}\left(1+\frac{1}{s^{2H-1}}\right)|\hat{Y}_s|^2+\upsilon|\hat{y}_s|^2+\upsilon s^{2H-1}|\hat{z}_s|^2\right)ds \le$$

$$\le \frac{4C}{\upsilon}E\int_{t_n}^T e^{\beta s}(1+\frac{1}{s^{2H-1}})|\hat{Y}_s|^2 ds + 4C\upsilon E\int_{t_n}^T e^{\beta s}(|\hat{y}_s|^2+s^{2H-1}|\hat{z}_s|^2)ds$$

여기서 υ는 정의상수이다.

식 (7), (8)을 리용하면

$$E\left(\int_{t_n}^{T} e^{\beta s}|\hat{Y}_s|^2\,ds+\int_{t_n}^{T} e^{\beta s}s^{2H-1}|\hat{Z}_s|^2\,ds\right)\le \tilde{G}\cdot E\int_{t_n}^{T} e^{\beta s}(|\hat{y}_s|^2+s^{2H-1}|\hat{z}_s|^2)ds$$

가 성립된다. 여기서 $\tilde{G}=\frac{2CGK}{\upsilon}\left[(T-t_n)+\frac{T^{2-2H}-t_n^{2-2H}}{1-H}\right]+2C\upsilon K$ 이다.

이제 $2C\upsilon K<1/4$ 이 되도록 υ 를 취하고 n 을 충분히 크게 하여

$$\frac{2CGK}{\upsilon}\left[(T-t_n)+\frac{T^{2-2H}-t_n^{2-2H}}{1-H}\right]<\frac{1}{2}$$

이 되도록 한다.

그러면 $E\left(\int_{t_n}^{T} e^{\beta s}|\hat{Y}_s|^2\,ds+\int_{t_n}^{T} e^{\beta s}s^{2H-1}|\hat{Z}_s|^2\,ds\right)\le \frac{3}{4}E\int_{t_n}^{T} e^{\beta s}(|\hat{y}_s|^2+s^{2H-1}|\hat{z}_s|^2)ds$ 가 성립되므로 I 는 $\tilde{M}_{[t_n,\ T]}\times\tilde{M}_{[t_n,\ T]}^H$ 우에서의 축소연산자이다.

따라서 방정식 (1)은 구간 $[t_n,\ T]$ 우에서 유일풀이를 가진다.

마찬가지로 I 는 $\tilde{M}_{[t_{n-1},\ t_n]}\times\tilde{M}_{[t_{n-1},\ t_n]}^H$ 우에서의 축소연산자로 된다.

이런 방법으로 계속하면 식 (1)은 $\tilde{M}_{[0,\ T]}\times\tilde{M}_{[0,\ T]}^H$ 우에서 유일풀이를 가진다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] R. Buckdahn et al.; SIAM J. Control Optimi., 55, 3, 1500, 2017.

[2] Y. Hu et al.; SIAM J. Control Optimi., 48, 1, 1675, 2009.

[3] L. Maticiuc et al.; Journal of Theoret. Probab., 28, 337, 2015.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

Existence and Uniqueness of the Solutions to Mean-Field Backward Stochastic Differential Equation Driven by Fractional Brownian Motion

Ri Kyong Il, O Hun

We prove the existence and uniqueness of the solutions to a mean-field backward stochastic differential equation driven by the fractional Brownian motion with Hurst index $H>1/2$.

Key words: mean-field, fractional Brownian motion

김일성종합대학학보 수 학
주체108(2019)년 제65권 제4호

비종점소득과 상태제한을 가진 미분경기에서 한가지 값함수계산도식에 대한 연구

장금성, 리국환

우리는 비종점소득과 상태제한을 가진 한가지 미분경기에서 값함수계산도식에 대한 연구를 진행하였다.

선행연구[4, 5]들에서 여러가지 값함수계산도식들이 제기되고 그에 기초하여 최량방략이 구성되였다. 그런데 이 계산도식들에 기초한 최량방략구성에서는 구성된 방략의 최량성평가를 몇가지 수치실험을 통하여 진행하였다.

론문에서는 비종점소득과 상태제한을 가진 미분경기에 대하여 최량방략구성가능한 한가지 값함수계산도식을 제안하고 그 성질들과 수렴성을 밝혔다.

비종점소득과 상태제한을 가진 미분경기[1]

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,\ x,\ u,\ v) \\ x \in \mathbf{R}^n,\ t \in I := [0,\ \theta],\ \ u \in P \subset \mathbf{R}^p,\ v \in Q \subset \mathbf{R}^q \\ \gamma(x(\cdot)) = \max\left\{ \min\limits_{t\in[0,\ \theta]} \sigma(t,\ x(t)),\ \ \max\limits_{t\in[0,\ \theta]} \chi(t,\ x(t)) \right\} \to \min\limits_{u},\ \max\limits_{v} \end{cases} \quad (1)$$

을 론의하자. 여기서 t는 시간변수, θ는 경기의 마감시각, x는 계의 상태벡토르, u, v는 각각 첫째 및 둘째 경기자의 조종벡토르들, P, Q는 각각 콤팍트들이다.

첫째 경기자(조종 u)의 목적은 소득을 최소화하는것이고 둘째 경기자(조종 v)의 목적은 최대화하는것이다.

가정 (1) 함수 $f(\cdot): I \times \mathbf{R}^n \times P \times Q \to \mathbf{R}^n$에 대한 가정

① 모든 변수들에 관하여 유계평등련속이다.(유계상수를 K로 표시)

② 변수 t, x에 관한 립쉬츠조건:

$$\| f(t_1,\ x_1,\ u,\ v) - f(t_2,\ x_2,\ u,\ v) \| \le L_f (|t_1 - t_2| + \| x_1 - x_2 \|)$$

$$\forall (t_i,\ x_i) \in I \times \mathbf{R}^n,\ i = 1,\ 2,\ \forall u \in P,\ \forall v \in Q$$

③ 아이젝쓰조건:

$$\min_{u\in P} \max_{v\in Q} < s,\ f(t,\ x,\ u,\ v) >= \max_{v\in Q} \min_{u\in P} < s,\ f(t,\ x,\ u,\ v) > (=: H(t,\ x,\ s))$$

$$\forall (t,\ x) \in I \times \mathbf{R}^n,\ \forall s \in \mathbf{R}^n$$

(2) 함수 $\sigma(\cdot),\ \chi(\cdot): \mathbf{R}^{1+n} \to \mathbf{R}^1$에 대한 가정

① $\sigma(\cdot)$와 $\chi(\cdot)$는 유계립쉬츠련속함수이다.(립쉬츠상수를 $L_\sigma,\ L_\chi$로 표시)

② $\sigma(\cdot)$와 $\chi(\cdot)$는 모든 t, x에 대하여 관계 $\sigma(t,\ x) \ge \chi(t,\ x)$가 성립한다.

우의 가정하에서 임의의 초기위치 $(t,\ x) \in I \times \mathbf{R}^n$에 대하여 문제 (1)의 경기값 $w^*(t,\ x)$가 존재하며[1, 2] 이때 값함수 $(t,\ x) \mapsto w^*(t,\ x)$는 유계립쉬츠련속함수이다.[2]

값함수계산을 위한 유한계차연산자를 정의하는데 필요한 다중선형보간공식[3]을 론의하자.

이제

$$\Delta > 0,\ \gamma > 0,\ \Delta_{\xi_i} := \gamma\Delta,\ i = \overline{1,\ n} \tag{2}$$

이라고 놓고 상태공간 $\mathbf{R}^n$의 직립방체그물

$$GR = \{x_{GR} = (\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)^{\mathrm{T}} :\ \xi_i = \xi_{0i} + j_i\Delta_{\xi_i},\ i = \overline{1,\ n},\ j_i = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\} \tag{3}$$

을 생각하자. 여기서 $\xi_{0i},\ i = \overline{1,\ n}$은 임의로 고정시킨 상수이다.

GR의 임의의 그물세포 $gd = \prod_{i=1}^{n}[\underline{\xi}_i,\ \overline{\xi}_i]$를 생각하자. 여기서 $\underline{\xi}_i,\ \overline{\xi}_i = \underline{\xi}_i + \Delta_{\xi_i}$는 그물세포 gd에 대한 ξ_i축의 아래웃값들이다. 선택된 직립방체에서 2^n개의 정점들에 번호를 붙이고 자리표를 $y_k^{gd},\ k = \overline{1,\ 2^n}$으로 표시하자. 그리고 매 번호 $k \in \overline{1,\ 2^n}$에 2진표시 $j^k = (j_1^k,\ \cdots,\ j_n^k)$를 대응시키자. 여기서

$$j_i^k = \begin{cases} 0,\ y_k^{gd}\text{의 } i\text{째 성분이 } \underline{\xi}_i\text{일 때} \\ 1,\ y_k^{gd}\text{의 } i\text{째 성분이 } \overline{\xi}_i\text{일 때} \end{cases}$$

이다. 또한 다음의 함수를 도입한다.

$$\omega_k(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n) = \prod_{i=1}^{n}(1-a_i)^{1-j_i^k}a_i^{j_i^k},\ k = \overline{1,\ 2^n}$$

여기서 i째 항은 j_i^k의 값에 따라 $1-a_i$ 또는 a_i이다. 이때 점 $x = (\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)^{\mathrm{T}} \in gd$에 대하여

$$\omega_k^{gd}(x) = \omega_k\left(\frac{\xi_1 - \underline{\xi}_1}{\Delta_{\xi_1}},\ \cdots,\ \frac{\xi_n - \underline{\xi}_n}{\Delta_{\xi_n}}\right),\ k = \overline{1,\ 2^n}$$

이라고 놓으면 분명히 $\sum_{k=1}^{2^n}\omega_k^{gd}(x) = 1$이다.

함수 $\varphi(\cdot) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$의 다중선형보간함수 $ML(\varphi)(\cdot)$을 다음과 같이 구성한다.

$$ML(\varphi)(x) = \sum_{k=1}^{2^n}\varphi(y_k^{gd(x)}) \cdot \omega_k^{gd(x)}(x) \tag{4}$$

다음의 사실이 성립한다.

보조정리 1 함수 $\varphi(\cdot) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$이 립쉬츠상수 L_φ인 립쉬츠련속함수라고 하자. 이때 임의의 점 $x \in \mathbf{R}^n$에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$|ML(\varphi)(x) - \varphi(x)| \le \frac{\sqrt{n}}{2}L_\varphi\gamma\Delta$$

증명 다중선형보간함수 $ML(\varphi)(\cdot)$의 구성으로부터

$$|ML(\varphi)(x) - \varphi(x)| = \left|\sum_{k=1}^{2^n}\varphi(y_k^{gd(x)}) \cdot \omega_k^{gd(x)}(x) - \varphi(x)\right| \le$$

$$\leq \sum_{k=1}^{2^n} |\varphi(y_k^{gd(x)}) - \varphi(x)| \cdot \omega_k^{gd(x)}(x) \leq L_\varphi \sum_{k=1}^{2^n} \| y_k^{gd(x)} - x \| \cdot \omega_k^{gd(x)}(x) \leq$$

$$\leq L_\varphi \max_{z \in gd(x)} \sum_{k=1}^{2^n} \| y_k^{gd(x)} - z \| \cdot \omega_k^{gd(x)}(z) = \frac{\sqrt{n}}{2} L_\varphi \gamma \Delta$$

이 성립한다. 여기서 최대값은 $gd(x)$ 의 중심점에서 얻어진다.(증명끝)

보통의 노름 $\|\cdot\|$ 과 함께 1－노름 $\|\cdot\|_1$ 을 생각하자. 여기서 $x = (\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$ 일 때 $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|$ 이다. 분명히 관계식 $\|x\| \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|$ 가 성립한다. 앞으로 보통의 노름의 경우에는 강조없이 리용하고 1－노름의 경우에는 매번 언급하기로 한다.

보조정리 2 함수 $\varphi(\cdot): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$ 이 1－노름의 의미에서 립쉬츠상수 L_φ 인 립쉬츠련속함수라고 하자. 이때 임의의 $x_1,\ x_2 \in \mathbf{R}^n$ 에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$|ML(\varphi)(x_1) - ML(\varphi)(x_2)| \leq L_\varphi \|x_1 - x_2\|_1$$

경기값함수의 최량방략구성가능한 계산도식을 구성하기 위하여 한가지 계차연산자를 도입한다.

이제

$$\Delta > 0,\ \gamma > 0,\ \Delta_{\xi_i} := \gamma\Delta,\ i = \overline{1,\ n}$$

이라고 놓고 $t \in I,\ t + \Delta \in I$ 라고 하자. $t + \Delta$ 시각에 값함수 $x \mapsto w^*(t + \Delta,\ x)$ 의 근사함수로서 유계립쉬츠련속함수 $\varphi(\cdot): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$ 이 주어진다고 하자.(립쉬츠상수를 L_φ 로 표시) 이때 연산자 $\varphi \mapsto \Pi_k(t,\ \Delta,\ \varphi)$ $(k = 1,\ 2)$ 를 각각 다음과 같이 정의한다.

$$\Pi_1(t,\ \Delta,\ \varphi)(x) := \begin{cases} \min\limits_{u \in P} \max\limits_{f \in cof(t,\ x,\ u,\ Q)} ML(\varphi)(x + \Delta f), & \Delta > 0 \\ \varphi(x), & \Delta = 0 \end{cases} \tag{5}$$

$$\Pi_2(t,\ \Delta,\ \varphi)(x) := \begin{cases} \max\limits_{v \in Q} \min\limits_{f \in cof(t,\ x,\ v,\ P)} ML(\varphi)(x + \Delta f), & \Delta > 0 \\ \varphi(x), & \Delta = 0 \end{cases} \tag{6}$$

정리 시간구간 I 의 분할 $\pi = \{0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_N = \theta\}$ (여기서 $\Delta = \tau_{i+1} - \tau_i,\ i = \overline{0,\ N-1}$) 에 대하여 연산자 Π_k $(k = 1,\ 2)$ 에 의한 근사도식이 다음의 공식들에 의하여 결정된다고 하자.

$$\overline{w}_\pi^k(\theta,\ x) = \max\{\sigma(\theta,\ x),\ \chi(\theta,\ x)\} = \sigma(\theta,\ x),\ x \in \mathbf{R}^n$$

$$\overline{w}_\pi^k(t,\ x) = \max\{\min\{\sigma(t,\ x),\ \Pi(t,\ \tau_{i+1} - t,\ \overline{w}_\pi(\tau_{i+1},\ \cdot))(x)\},\ \chi(t, x)\} \tag{7}$$

$$t \in [\tau_i,\ \tau_{i+1}),\ x \in \mathbf{R}^n,\ i = \overline{0,\ N-1}$$

이때 다음의 평가식이 성립한다.($k = 1,\ 2$)

$$\|\overline{w}_\pi^k - w^*\| \leq C\sqrt{\Delta}$$

여기서

$$\|\overline{w}_\pi^k - w^*\| := \max_{(t,\ x) \in I \times \mathbf{R}^n} |\overline{w}_\pi^k(t,\ x) - w^*(t,\ x)|$$

이다.

참 고 문 헌

[1] N. D. Botkin et al.; Analysis, 31, 355, 2011.

[2] A. I. Subbotin et al.; Optimization of Guaranteed Result in Control Problems, Nauka, Moscow, 1～288, 1981.

[3] G. E. Ivanov; Differential Equations, 48, 4, 560, 2012.

[4] P. E. Souganidis; Journal of Differential Equations, 59, 1, 1985.

[5] Guo Bao-Zhu et al.; J. Syst. Sci. Complex, 3, 30, 782, 2017.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

An Approximation Scheme for Constructing the Value Function in the Differential Games with Nonterminal Payoffs and State Constraints

Jang Kum Song, Ri Kuk Hwan

In this paper, for the differential games with nonterminal payoffs and state constraints, we present an approximation scheme for constructing the value function and estimate its convergence.

Key words: differential game, value function

김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

쌍짓기를 리용하지 않는 한가지 무증명서대리서명도식

리설경, 김철은

선행연구[1]에서는 무증명서전자서명도식의 개념을 처음으로 제기하였다. 그후 선행연구[2]에서 한가지 구체적인 무증명서전자서명도식을 제기하고 우연오라클모형하에서 증명가능한 안전성을 가진다는것을 증명하였다. 선행연구[3]에서는 한가지 쌍짓기를 리용하는 무증명서전자서명도식과 무증명서대리전자서명도식을 내놓았다.

그런데 타원곡선군우에서의 쌍짓기연산은 스칼라점곱하기연산보다 계산량이 더 많은것으로 하여 최근에는 쌍짓기를 리용하지 않는 서명도식에 대한 연구가 활발히 진행되고있다. 선행연구[4]에서는 쌍짓기를 리용하지 않는 무증명서전자서명도식을 내놓았으며 특히 선행연구[5]에서는 ECDSA와 타원곡선군우에서의 리산로그문제에 기초한 열쇠생성알고리듬을 결합하여 반로그문제에 기초한 한가지 쌍짓기를 리용하지 않는 무증명서전자서명도식을 제기하였다.

론문에서는 한가지 쌍짓기를 리용하지 않는 무증명서대리서명도식을 제기하고 반로그문제의 계산복잡성에 기초하여 그것의 안전성을 밝혔다.

1. 무증명서대리서명도식의 구성

원시서명자 A가 자기의 서명권한을 대리서명자 B에게 위탁하였다고 하자. 이때 무증명서대리서명에는 원시서명자 A, 대리서명자 B, 대리서명검증자 V, 열쇠생성중심 KGC가 참가한다. 신분정보는 ID_A, ID_B이고 원시 및 대리서명자, 검증자를 사용자라고 부른다. m_w는 위탁정보를 표시하는데 이 정보에는 원시서명자와 대리서명자의 신분정보 및 위탁기간, 위탁권한의 범위와 일련의 관련파라메터들이 들어있다. Inf_{pro}는 m_w와 원시서명자의 공개열쇠를 리용하여 대리서명자에게 주는 위탁된 서명권한이다. s_p는 대리서명열쇠, $\sigma_p = Sig(s_p,\ M)$은 대리서명자 B가 생성한 통보문 M에 대한 A의 대리서명이다.

새로 제기하는 대리서명도식을 다음의 다항식시간알고리듬들로 구성한다.

$\leftarrow_R$는 우연선택을 의미하고 $s \cdot P$는 토대점에 관한 타원곡선스칼라점곱하기연산을 나타내며 x_W, y_W, $w \in \{P,\ P_{KGC},\ P_A,\ P_B,\ R_A,\ R_B,\ V_A,\ W_A,\ W_B,\ W_B'\}$는 타원곡선점들의 $x,\ y$ 자리표들이고 기호 $\|$는 련결기호이다.

Setup: 입력 1^k, 출력 $s,\ Params$, KGC가 실행

① $k-$bit 씨수 p와 씨체 F_p우에서 정의된 타원곡선 $E: Y^3 = X^2 + aX + b$를 선택, P를 토대점으로 하며 씨수위수 q를 가지는 타원곡선군 $E(F_p)$ 선택

② $s \leftarrow_R Z_q^*,\ P_{KGC} = s \cdot P$

③ 해쉬함수

$H_1 : \{0,\ 1\}^* \to \{0,\ 1\}^n,\ H_2 : \{0,\ 1\}^* \to Z_q^*,\ H_3 : \{0,\ 1\}^* \to Z_q^*,\ H_4 : \{0,\ 1\}^* \to \{0,\ 1\}^n,\ n > 0$ 선택

④ $Params = \{a, b, p, q, P_{KGC}, P, H_1, H_2, H_3, H_4\}$, s 출력

KGC는 $Params$ 를 공개파라메터로 공개하고 주열쇠 s 는 안전하게 보관한다.

Set-User-Key: 입력 $Params, ID_i, i \in \{A, B\}$, 출력 (X_i, x_i), 사용자가 실행

① $x_i \leftarrow Z_q^*$, $X_i = x_i \cdot P$

② (X_i, x_i) 출력

자체공개열쇠 X_i 를 KGC에 보내고 자체비공개열쇠 x_i 는 안전하게 보관한다.

Extract-Partial-Private-Key: 입력 $Params, ID_i, s, X_i, i \in \{A, B\}$, 출력 (R_i, d_i), KGC가 실행

① $z_i = H_1(a \| b \| x_P \| y_P \| x_{P_{KGC}} \| y_{P_{KGC}} \| ID_i),\ i \in \{A, B\}$

② $r_i \leftarrow_R Z_q^*$, $R_i = r_i \cdot P + X_i$

③ $\lambda_i = H_2(x_{R_i} \| y_{R_i} \| z_i)$

④ $d_i = (r_i + s\lambda_i) \bmod q$

⑤ (R_i, d_i) 출력

KGC는 (R_i, d_i) 를 사용자에게 보낸다. 여기서 d_i 는 신분이 ID_i 인 사용자의 부분비공개열쇠, R_i 는 부분공개열쇠이다.

Set-Private-Key: 입력 $Params, ID_i, R_i, d_i, X_i, x_i, i \in \{A, B\}$, 출력 s_i, 사용자가 실행

① $z_i = H_1(a \| b \| x_P \| y_P \| x_{P_{KGC}} \| y_{P_{KGC}} \| ID_i),\ i \in \{A, B\}$

② $d_i \cdot P = R_i - X_i + H_2(x_{R_i} \| y_{R_i} \| z_i) \cdot P_{KGC}$ 인가 검증

③ (R_i, d_i) 가 유효하면 $s_i = (x_i + d_i) \bmod q$ 출력

신분정보가 ID_i 인 사용자는 s_i 를 자기의 완전한 비공개열쇠(서명열쇠)로 안전하게 보관한다.

Set-Public-Key: 입력 $Params, ID_i, R_i, i \in \{A, B\}$, 출력 P_i, 사용자가 실행

$P_i = R_i$ 를 출력, 사용자는 P_i 를 자기의 완전한 공개열쇠로 한다.

Extract-Proxy-Key: 입력 $Params, ID_i, P_i, s_i, i \in \{A, B\}, m_w$, 출력 s_p, 사용자들이 실행

① 원시서명자 A

$$z_A = H_1(a \| b \| x_P \| y_P \| x_{P_{KGC}} \| y_{P_{KGC}} \| ID_A)$$

$$w_A \leftarrow_R Z_q^*,\ W_A = w_A \cdot P$$

$$h_A = H_3(m_w \| x_{W_A} \| y_{W_A} \| x_{P_A} \| y_{P_A} \| x_{P_B} \| y_{P_B} \| z_A)$$

$$V_A = h_A(w_A + s_A) \cdot P$$

A 는 서명권한 $Inf_{pro} = (m_w, W_A, V_A)$ 를 B 에게 위탁

② 대리서명자 B

$$z_A = H_1(a \| b \| x_P \| y_P \| x_{P_{KGC}} \| y_{P_{KGC}} \| ID_A)$$

$$\lambda_A = H_2(x_{P_A} \| y_{P_A} \| z_A)$$

$$h_A = H_3(m_w \| x_{W_A} \| y_{W_A} \| x_{P_A} \| y_{P_A} \| x_{P_B} \| y_{P_B} \| z_A)$$

$V_A = h_A(W_A + P_A + \lambda_A \cdot P_{KGC})$ 가 성립하는가 검증

성립하지 않으면 서명권한을 다시 보낼것을 요구

성립하면

$$h_B = H_3(m_w \| x_{W_A} \| y_{W_A} \| x_{P_A} \| y_{P_A} \| x_{P_B} \| y_{P_B} \| z_B)$$

$$s_P = (x_{V_A} + h_B s_B) \bmod q$$

여기서 x_{V_A} 는 V_A 의 x자리표이며 대리서명자는 s_p 를 서명열쇠로 한다.

Proxy-Signature-Generation: 입력 $Params,\ ID_B,\ m_w,\ s_P,\ W_A,\ M \in \{0, 1\}^*,\ P_i,\ i \in \{A, B\}$, 출력 σ_P, 대리서명자가 실행

$$z_B = H_1(a \| b \| x_P \| y_P \| x_{P_{KGC}} \| y_{P_{KGC}} \| ID_B)$$

$$h_B = H_3(m_w \| x_{W_A} \| y_{W_A} \| x_{P_A} \| y_{P_A} \| x_{P_B} \| y_{P_B} \| z_B)$$

$$h = H_4(h_B \| M),\ w_B \leftarrow_R Z_q^*,\ W_B = w_B \cdot P$$

$$u = x_{W_B} \bmod q,\ v = w_B^{-1}(us_P + h) \bmod q$$

$$\sigma_P = (u,\ v)$$

대리서명자는 $(M,\ m_w,\ W_A,\ V_A,\ \sigma_P)$ 를 검증자에게 보낸다.

Proxy-Signature-Verification: 입력 $Params,\ ID_B,\ P_i,\ i \in \{A, B\},\ M,\ m_w,\ W_A,\ V_A,\ \sigma_P$ 출력 True/Error, 대리서명검증자가 실행

① 통보문 M 이 위탁정보 m_w 를 리용하여 결정된 통보문인가를 검사한다. 성립하지 않으면 이 서명을 거절한다.

$$z_B = H_1(a \| b \| x_P \| y_P \| x_{P_{KGC}} \| y_{P_{KGC}} \| ID_B)$$

$$h_B = H_3(m_w \| x_{W_A} \| y_{W_A} \| x_{P_A} \| y_{P_A} \| x_{P_B} \| y_{P_B} \| z_B)$$

$$O_B = x_{V_A} \cdot P + h_B \cdot (P_B + \lambda_B \cdot P_{KGC}),\ h = H_4(h_B \| M)$$

$$\upsilon_1 = \upsilon^{-1} h \bmod q,\ \upsilon_2 = \upsilon^{-1} u \bmod q$$

$$W'_B = \upsilon_1 \cdot P + \upsilon_2 \cdot O_B,\ u' = x_{W'_B} \bmod q$$

② $u = u'$ 를 검증하고 성립하면 True, 아니면 Error를 출력한다.

2. 안전성분석

서명도식의 정확성은 다음의 식으로부터 나온다.

$$\begin{aligned} W'_B &= \upsilon_1 \cdot P + \upsilon_2 \cdot O_B = \\ &= \upsilon^{-1} h \cdot P + \upsilon^{-1} u \cdot (x_{V_A} \cdot P + h_B \cdot (P_B + \lambda_B \cdot P_{KGC})) = \\ &= \upsilon^{-1}(h + u(x_{V_A} + h_B(x_B + r_B + \lambda_B s))) \cdot P = \\ &= w_B (h + us_P)^{-1} (h + u(x_{V_A} + h_B(x_B + r_B + \lambda_B s))) \cdot P = \\ &= w_B \frac{h + u(x_{V_A} + h_B(x_B + r_B + \lambda_B s))}{h + us_P} \cdot P = \\ &= w_B \frac{h + u(x_{V_A} + h_B(x_B + r_B + \lambda_B s))}{h + u(x_{V_A} + h_B(x_B + d_B))} \cdot P = \\ &= w_B \cdot P = W_B \end{aligned}$$

P 를 토대점으로 하는 순환군 $G=<P>$ 에서 $\forall Q\in G$, $a\cdot P=Q$ 인 $a\in Z_q^*$ 을 계산하는 문제를 리산로그문제라고 부르고 DLP로 표시한다.[1, 2, 5]

또한 $\forall Q\in G$, $u=F(v^{-1}\cdot P+u\cdot Q)$ 인 (u, v) 를 구하는 문제를 반로그문제라고 부른다.[5] 여기서 $F(X)$ 는 점 X 의 x자리표이다.

대리서명에 참가하는 사용자의 공개열쇠를 교체할수는 있으나 KGC의 주열쇠를 알수 없는 적수를 1형태적수 혹은 외부적수라고 하고 A_I 로 표시한다.[1] KGC의 주열쇠를 알수 있으나 사용자의 비공개열쇠를 알거나 교체할수 없는 적수를 2형태적수 혹은 내부적수라고 하고 A_{II} 로 표시한다. 목표 ID_* 과 그것의 공개열쇠에 따르는 타당한 서명을 생성하는 1형태적수 A_I 를 A_{I_a} 로 표시한다.

론문에서 제기한 대리서명도식의 안전성은 다음의 정리에 의하여 담보된다.

정리 1 만일 확률적다항식시간적수 A_{I_a} 가 우연오러클모형에서 대리서명도식에 대한 공격실험에서 무시할수 없는 확률로 성공할수 있다면 군 $E(F_P)$ 에서의 반로그문제는 다항식시간내에 풀수 있다.

정리 2 만일 확률적다항식시간적수 A_{II} 가 존재하여 대리서명도식을 파괴하기 위한 경기에서 무시할수 없는 확률로 성공할수 있다면 군 $E(F_P)$ 에서의 반로그문제는 다항식시간내에 풀수 있다.

참 고 문 헌

[1] S. S. Al-Riyami et al.; LNCS, 2894, 452, 2003.
[2] R. Castro, R. Dahab; IACR ePrint, 196, 1, 2007.
[3] Bo Yang et al.; IACR ePrint, 721, 1, 2013.
[4] J. Baek et al.; LNCS 3650, 134, 2005.
[5] Z. Cheng et al.; IACR ePrint, 386, 1, 2018.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

A Pairing-Free Certificateless Proxy Signature Scheme

Ri Sol Gyong, Kim Chol Un

In this paper, we construct a pairing-free certificateless public key proxy signature scheme which is based on semi-logarithm problem on the elliptic curve group and prove its security.

Key words: certificateless proxy signature scheme, pairing, semi-logarithm problem

김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

1 차원공간에서 준림계산일비선형슈뢰딩게르방정식의 풀이의 점근동태

최광윤, 김진명

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《현시대는 과학과 기술의 시대이며 과학과 기술이 류례없이 빠른 속도로 발전하는것은 현대과학기술발전의 중요한 특징입니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제15권 485페지)

량자력학의 기본방정식인 비선형슈뢰딩게르방정식의 꼬쉬문제는 다음과 같다.

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx}/2 = \lambda |u|^{2-2\gamma} u & (x \in \mathbf{R},\ t > 0) \\ u(0,\ x) = u_0(x) & (x \in \mathbf{R}) \end{cases} \tag{1}$$

여기서 $\lambda \in \mathbf{C}$ 이다. 비선형슈뢰딩게르방정식의 풀이의 점근동태에 대한 연구가 적지 않게 진행되였다. 우선 선행연구[2]에서는 $\gamma < 0$ 인 경우 저에네르기산란성 즉 충분히 작은 초기값에 대하여 방정식 (1)의 풀이가 $t \to \infty$ 일 때 자유슈뢰딩게르방정식의 풀이에로 수렴한다는것을 밝혔다. 그리고 선행연구[1]에서는 $\gamma \ge 0$ 인 경우 저에네르기산란성을 얻을수 없다는것을 밝혔다. 또한 선행연구[3]에서는 $\gamma = 0$ 인 경우 개량된 산란성 즉 충분히 작은 초기값에 대하여 방정식 (1)의 풀이가 $t \to \infty$ 일 때 어떤 $w_0 (\in L^\infty(\mathbf{R}^n))$ 에로 수렴한다는것을 밝혔다. 계속하여 선행연구[5]에서는 초기값 u_0 과 $\gamma = \gamma(u_0)$ 이 충분히 작은 정수일 때 방정식 (1)의 풀이에 대하여 $\|u(t)\|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-1/(2-2\gamma)}$ 이 성립한다는것을 밝혔다.

론문에서는 초기값 u_0 과 $\gamma := \gamma(\|u_0\|_{H^{0,1} \cap H^1})$ 이 충분히 작은 정수일 때 방정식 (1)의 풀이에 대하여 선행연구[5]에서와 같은 결과 $\|u(t)\|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-1/(2-2\gamma)}$ 을 얻었다.

F 는 푸리에변환, F^{-1} 은 거꿀푸리에변환이라고 하고 $<x> := \sqrt{1+|x|^2}$ 으로 놓자. 또한 무게붙은 쏘볼레브공간을 $H_p^{m,k} := \{\phi \in L^p \mid \| <x>^k <i\partial_x>^m \phi \|_{L^p} < +\infty\ (m,\ k \in \mathbf{R}^+;\ 1 \le p \le +\infty)\}$ 로 정의하자. 그리고 간단히 하기 위하여 $H^{m,k} := H_2^{m,k},\ H^m := H^{m,0}$ 으로 표시하자.

론문에서 리용된 선행연구[4]에서와 류사한 분해방법과 변환들은 다음과 같다.

$$M(t) := e^{ix^2/(2t)},\ D(t)\phi := \frac{1}{\sqrt{it}} \phi\left(\frac{x}{t}\right),\ V(t)\phi := FM_t F^{-1}\phi = \sqrt{\frac{it}{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-it(\xi-y)^2/2} \phi(y)dy$$

로 놓으면 $U(t) = e^{it\Delta/2} = M(t)D(t)FM(t) = M(t)D(t)V(t)F$ 로 분해된다. 또한 $E(t) := e^{it\xi^2/2}$ 으로 놓으면

$$FU(-t) = iV(-t)\overline{E}(t)D(1/t) \tag{2}$$

로 분해된다. 그리고 식 (1)의 왼변과 오른변에 $FU(-t)$ 를 실시한 결과는 각각 다음과 같다.

$$FU(-t)(iu_t + u_{xx}/2) = i\partial_t (FU(-t)u) \tag{3}$$

$$iV(-t)\overline{E}(t)D(1/t)(\lambda |u|^{2-2\gamma} u) = \lambda t^{-1+\gamma} V(-t)(|\overline{E}(t)D(1/t)u|^{2-2\gamma}\ \overline{E}(t)D(1/t)u) \tag{4}$$

또한 $\varphi := FU(-t)u = V(-t)v$, $v := V(t)FU(-t)u = i\overline{E}(t)D(1/t)u$ 로 놓자.

보조정리 1 임의의 $t(>1)$ 에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$\| u \|_{L^\infty} \le Ct^{-1/2} \| FU(-t)u \|_{L^\infty} + Ct^{-3/4} \| U(-t)u \|_{H^{0,1}}$$

보조정리 2 임의의 $\alpha(>1)$ 에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.[5]

$$\| |u|^\alpha u \|_{H^1} \le C \| u \|_{L^\infty}^\alpha \| u \|_{H^1} , \ \| xU(-t)(|u|^\alpha u) \|_{L^2} \le C \| u \|_{L^\infty}^\alpha \| xU(-t)u \|_{L^2}$$

모임 X_T 와 넘기기 A 를 다음과 같이 구성하자.

$$X_T := \left\{ u \,\middle|\, \| u \|_{X_T} := \sup_{t\in[0,\,T]} \{ (1+t)^{-2\gamma} \| U(-t)u \|_{H^{0,1}} + (1+t)^{1/(2-2\gamma)-1/2} \| FU(-t)u \|_{L^\infty} \} \le 2\varepsilon \right\}$$

여기서 ε 은 충분히 작은 정의 상수이다.

$$A : u \mapsto U(t)u_0 - i\lambda \int_0^t U(t-\tau)(|u(\tau)|^{2-2\gamma} u(\tau))d\tau \qquad (5)$$

보조정리 3 $\| Fu_0 \|_{L^\infty} + \| u_0 \|_{H^{0,1}} \le \varepsilon$ 이면 어떤 $T(>1)$ 가 존재하여 방정식 (1)의 국부적풀이 $u(\in X_T)$ 는 유일존재한다.

정리 1 $-1/\gamma^3 \ge \mathrm{Im}\lambda$, $\gamma = C_0\varepsilon^{1/2}$ (여기서 ε , C_0 은 충분히 작은 정의 상수), $u_0 \in H^1 \cap H^{0,1}$ 이라고 하자. 이때 $\| Fu_0 \|_{L^\infty} + \| u_0 \|_{H^{0,1}} \le \varepsilon$ 이면 방정식 (1)의 유일풀이 $u(\in C([0,\ +\infty);\ H^1 \cap H^{0,1}))$ 가 존재하여 부등식 $\| u \|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-1/(2-2\mu)}$ 이 성립한다.

증명 보조정리 3으로부터 방정식 (1)은 국부적풀이 u 를 가지며 그 풀이에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$\| U(-1)u(1) \|_{H^{0,1}} + \| FU(-1)u(1) \|_{L^\infty} \le 2\varepsilon \qquad (6)$$

이제 임의의 $T(>1)$ 에 대하여 다음의 부등식이 성립한다는것을 귀유법으로 증명해보자.

$$\sup_{t\in[1,\,T]} \{ t^{-2\gamma} \| U(-t)u \|_{H^{0,1}} + t^{1/(2-2\gamma)-1/2} \| FU(-t)u \|_{L^\infty} \} < \varepsilon^{1-2\gamma}$$

귀유법가정으로부터 어떤 T 가 있어서

$$\sup_{t\in[1,\,T]} \{ t^{-2\gamma} \| U(-t)u \|_{H^{0,1}} + t^{1/(2-2\gamma)-1/2} \| FU(-t)u \|_{L^\infty} \} \le \varepsilon^{1-2\gamma}$$

이 성립한다는것이 밝혀진다. 한편 식 (3), (4)로부터 다음의 식이 성립한다.

$$i\varphi_t - \lambda t^{-1+\gamma} |\varphi|^{2-2\gamma} \varphi = \lambda t^{-1+\gamma} (|v|^{2-2\gamma} v - |\varphi|^{2-2\gamma} \varphi) + \lambda t^{-1+\gamma} (V(-t)-1)(|v|^{2-2\gamma} v) = I_1 + I_2$$

그러므로 이 식의 량변에 $\overline{\varphi}$ 를 곱하고 허수부를 비교해보면 다음의 식이 성립한다.

$$\partial_t |\varphi| + |\mathrm{Im}\lambda| t^{-1+\gamma} |\varphi|^{3-2\gamma} \le |I_1| + |I_2| \qquad (7)$$

또한 미분방정식 $\partial_t f + \dfrac{t^{-1+\gamma}}{\gamma^3} f^{3-2\gamma} = 0$, $f(1) = |FU(-1)u(1)|$ 의 풀이는 다음과 같다.

$$f(t) = f(1)/[1+(2-2\gamma)f(1)^{2-2\gamma}(t^\gamma - 1)/\gamma^4]^{1/(2-2\gamma)}$$

그러므로 식 (6)과 보조정리 2로부터 다음의 식이 성립한다.

$$C_1\varepsilon^{1/(1-\gamma)} t^{-\gamma/(2-2\gamma)} \le f(t) \le C_2\varepsilon^{1/(1-\gamma)} t^{-\gamma/(2-2\gamma)} \qquad (8)$$

따라서 식 (7)의 량변에 $f^{-3+2\gamma}$ 을 곱하고 양그부등식을 리용하면 다음의 식이 성립한다.

$$\partial_t(f^{-3+2\gamma}|\varphi|) \le t^{-1+\gamma}(2-2\gamma)/\gamma^3 + f^{-3+2\gamma}(|I_1|+|I_2|)$$

그런데 선행연구[4]에서의 정리 3.1과 보조정리 1, 2로부터

$$|I_1|+|I_2| \le \lambda t^{-5/4+\gamma}\|\partial_x(|v|^{2-2\gamma}v)\|_{L^2} \le \lambda t^{-5/4+\gamma}\|v\|_{L^\infty}^{2-2\gamma}\|\partial_x v\|_{L^2} \le Ct^{-5/4+2\gamma}\varepsilon^{(1-2\gamma)(3-2\gamma)}$$

이 성립하므로 $\partial_t(f^{-3+2\gamma}|\varphi|) \le t^{-1+\gamma}(2-2\gamma)/\gamma^3 + Ct^{-5/4+\gamma+2\gamma^2}\varepsilon^{(1-2\gamma)(3-2\gamma)}f^{-3+2\gamma}$ 이 성립한다.

따라서

$$|\varphi| \le C\varepsilon t^{1/2-1/(2-2\gamma)} \tag{9}$$

이 성립한다. 한편 식 (5)와 보조정리 2 및 그론월의 부등식으로부터

$$\|U(-t)u\|_{H^{0,1}} \le C\varepsilon e^{C\varepsilon^{(2-2\gamma)(1-2\gamma)}\int_1^t \tau^{-1}d\tau} \le C\varepsilon t^{C\varepsilon^{(2-2\gamma)(1-2\gamma)}} \le C\varepsilon t^{2\gamma} \tag{10}$$

이 성립한다. 따라서 식 (9), (10)으로부터

$$\sup_{t\in[1,T]}\{t^{-2\gamma}\|U(-t)u\|_{H^{0,1}} + t^{1/(2-2\gamma)-1/2}\|FU(-t)u\|_{L^\infty}\} \le C\varepsilon < \varepsilon^{1-2\gamma}$$

이 성립한다. 이것은 귀유법가정에 모순된다.(증명끝)

정리 2 $\mathrm{Im}\lambda<0$, $\gamma=C_0\varepsilon^{2-2\gamma}$ (여기서 ε, C_0 은 충분히 작은 정의 상수), $u_0\in H^1\cap H^{0,1}$ 이라고 하자. 그러면 $\|Fu_0\|_{L^\infty}+\|u_0\|_{H^{0,1}}\le\varepsilon$ 일 때 정리 1의 결과가 그대로 성립한다.

주의 선행연구[5]에서는 $K:=K(\gamma)$ 는 어떤 $(t_0,\ \xi_0)(\in[1,\ T]\times\mathbf{R})$ 가 있어서

$$t_0^{1/(2-2\gamma)-1/2}|Fu(t_0,\ \xi_0)|>K$$

를 만족시켜야 하였다. 즉 γ 는 u_0 에 관계된다. 그러나 정리 1과 2에서 γ 가 $\|u_0\|_{H^{0,1}\cap H^1}$ 에만 관계된다.

참 고 문 헌

[1] J. E. Barab; J. Math. Phys., 25, 11, 3270, 1984.

[2] T. Cazenave et al.; Commun. Contemp. Math., 19, 2, 1650038, 2017.

[3] T. Cazenave et al.; J. Funct. Anal., 274, 402, 2018.

[4] N. Hayashi et al.; Nonlinear Anal., 108, 189, 2014.

[5] N. Kita et al.; J. Differential Equations, 292, 192, 2007.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

Asymptotic Behavior of Solutions for Subcritical Dissipative Nonlinear Schrödinger Equations in One Dimension Space

Choe Kwang Yun, Kim Jin Myong

In this paper, we obtain an asymptotic behavior of the solution of the subcritical dissipative nonlinear Schrödinger equations $iu_t+u_{xx}/2=\lambda|u|^{2-2\gamma}u$ with sufficiently small initial data.

Key words: Sobolev space, asymptotic behavior, Cauchy problem

k－평균무리짓기알고리듬에서 불명확성을 고려한 표본무게결정의 한가지 방법

현철민, 윤룡한

자료발굴의 중요한 분야인 무리짓기에서 k－평균무리짓기알고리듬은 계산량이 적고 효과적인것으로 하여 널리 쓰이고있다.[1]

k－평균무리짓기알고리듬의 무리짓기정확도를 개선하기 위하여 표본들의 무게를 결정하는 여러가지 방법들이 연구되고있다.[1－3]

선행연구[2]에서는 표본과 무리중심사이의 거리에 의해서 표본들의 무게를 결정하였으며 선행연구[3]에서는 표본과 무리중심들사이의 거리와 함께 각을 리용하여 표본의 명확성, 불명확성을 정의하고 그것에 의해 무게를 결정하는 방법을 제기하였다.

그러나 선행연구[3]의 방법은 불명확한 표본에 대하여 불명확성만 고려하고 그것의 불명확한 정도는 고려하지 못하였으며 무리중심근방의 표본들도 불명확한 표본으로 되는 제한성이 있다.

론문에서는 표본들의 명확성과 불명확성을 새롭게 정의하고 불명확한 표본에 대하여 그것의 불명확한 정도까지 고려하여 무게를 결정함으로써 무리짓기정확도를 높이였다.

1. 표본의 명확성과 불명확성, 무게결정방법

$X=\{x_i \mid i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$을 n개의 표본, X가 m개의 무리 $C_j\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$로 나누어지며 $c_j\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$를 매 무리의 중심이라고 하자. $\overrightarrow{c_j c_q}$를 두 무리중심점 c_j와 c_q를 지나는 벡토르, $\prod_{jq}$를 중심점 c_j를 지나며 $\overrightarrow{c_j c_q}$를 법선벡토르로 하는 초평면

$$A_{jq}=\{x_i \in C_j \mid (\overrightarrow{c_j x_i},\ \overrightarrow{c_j x_i})>0 \wedge d(x_i,\ c_j)<d(c_j,\ c_q)\}$$

$$d_{jq}=\frac{1}{|A_{jq}|}\sum_{x_i \in A_{jq}} \| x_i - c_j \|^2$$

라고 하자.(그림)

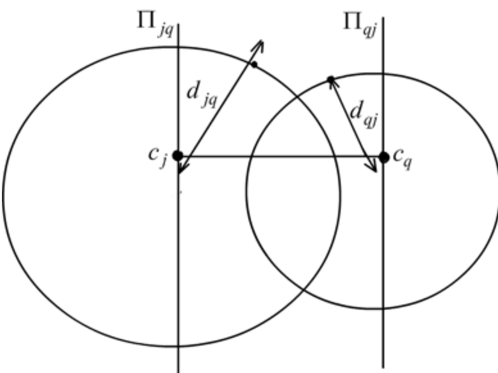


그림. 표본의 명확성판정

정의 $x \in C_j$일 때 모든 $q \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ m\} \setminus \{j\}$에 대하여 $x \notin V(c_j,\ d_{jq}) \cap V(c_q,\ d_{qj})$이면 x는 C_j에서 명확하다고 말하고 그렇지 않으면 불명확하다고 말한다. 여기서 $V(c,\ d)$는 중심이 c이고 반경이 d인 구이다.

무리 C_j에 대하여 $\alpha_q^{(j)}$, $X_q^{(j)}$를

$$\alpha_q^{(j)}=\frac{d(c_j,\ c_q)-d_{qj}}{d_{jq}} \tag{1}$$

$$X_q^{(j)}=\{x\in C_j \mid x\in V(c_j,\ d_{jq})\cap V(c_q,\ d_{qj})\}$$

로 놓고 C_j 의 불명확한 표본 x_i 에 대하여 모임 $X_q^{(j)}$ 가 x_i 를 포함하는 $q\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}\setminus\{j\}$ 들의 모임을

$$Q_q^{(ij)}=\{q\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}\setminus\{j\} \mid x_i\in X_q^{(j)}\}$$

라고 하자. 이에 기초하여 불명확한 표본의 무게 w_{ij} 를 다음과 같이 결정한다.

$$w_{ij}=\prod_{q\in Q_q^{(ij)}}\alpha_q^{(j)}\exp(-\|x_i-c_j\|^2) \tag{2}$$

또한 명확한 표본의 무게 w_{ij} 를 다음과 같이 결정한다.

$$w_{ij}=\exp(-\|x_i-c_j\|^2) \tag{3}$$

식 (2), (3)으로부터 다음의 사실들이 성립한다는것을 쉽게 알수 있다.

무리중심 c_j 까지의 거리가 같은 명확한 표본 x_i 와 불명확한 표본 x_k 에 대하여 $w_{ij}>w_{kj}$ 이다.

두 불명확한(명확한) 표본 x_i, x_k 에 대하여 $d(x_i,\ c_j)\geq d(x_k,\ c_j)$ 이면 $w_{ij}\leq w_{kj}$ 이다.

두 불명확한 표본 x_i, x_k 에 대하여 $|Q_q^{(ij)}|>|Q_q^{(kj)}|$ 이면 $w_{ij}<w_{kj}$ 이다.

2. 제안한 무게붙은 $k-$평균무리짓기알고리듬

입력: n 개의 표본 $X=\{x_i \mid i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$, 무리의 개수 m, 중심의 변동 ε, 최대반복수 T

출력: 무리들의 대표점 $c_j\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$

걸음 1 m 개의 무리중심 $c_j\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 를 임의로 초기화하고 $t=1$ 로 놓는다.

걸음 2 매 표본들에 대하여 모든 무리중심까지의 거리를 계산하고 거리가 최소인 무리에 표본을 소속시킨다.

걸음 3 매 무리에 대하여 무리내의 표본들의 명확성을 판정한다.

걸음 4 불명확한 표본에 대해서는 식 (2)로, 명확한 표본에 대하여서는 식 (3)에 의하여 그것의 무게 ω_{ij} 를 결정하고 무리중심

$$c_j=\sum_{i=1}^{n}g_{ij}\omega_{ij}x_i\bigg/\sum_{i=1}^{n}g_{ij}\omega_{ij}$$

를 갱신한다. 여기서 $g_{ij}=\begin{cases}1, & x_i\in C_j\\ 0, & x_i\notin C_j\end{cases}$ 이다.

걸음 5 $\max_{1\leq j\leq m}\|c_j-c_j'\|<\varepsilon$ 이거나 $t=T$ 이면 걸음 6으로 이행하고 그렇지 않으면 반복수를 하나 증가하고$(t=t+1)$ 걸음 2로 이행한다. 여기서 c_j' 는 전단계에서 얻어진 무리중심이다.

걸음 6 $c_j\ \ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 를 출력한다.

3. 성 능 평 가

알고리듬의 성능을 KDD CUP99자료기지와 weak 3.9의 표준자료화일인 diabetes.arff를 가지고 평가하였다. 무게붙은 k – 평균알고리듬(KM)과 선행연구[3]의 방법(SWKMA), 론문의 방법으로 무리짓기를 진행하였을 때 그 정확도는 표와 같다.

표. 알고리듬의 성능평가

자료기지	자료수/개	무리수/개	KM	SWKMA	론문의 방법
KDD CUP99	25192	5	72.28%	76.21%	78.07%
diabetes	768	2	67.8%	68.2%	70.1%

참 고 문 헌

[1] R. Xu et a1.; IEEE Transactions on Neural Networks, 16, 3, 645, 2005.
[2] P. F. Huang et a1.; Neurocomputing, 73, 16, 2935, 2010.
[3] Jianyuan Li et a1.; IEEE Transactions on Neural Networks, 27, 2, 589, 2015.

주체 108(2019)년 6월 10일 원고접수

A Sample's Weight Decision Method for k – Means Clustering Algorithm Considering Ambiguity of the Samples

Hyon Chol Min, Yun Ryong Han

We propose a new weighted k – means clustering algorithm based on ambiguity of the samples. The experimental results indicate that the proposed algorithm have better effect than KM and SWKMA.

Key words: k – means clustering algorithm, clustering algorithm, sample weighting scheme

김일성종합대학학보 수 학 주체108(2019)년 제65권 제4호

초공간에로 유도된 원둘레넘기기의 $\omega-$극한모임에 대한 연구

리성훈, 주현희

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《새로운 과학기술분야를 개척하기 위한 사업도 전망성있게 밀고나가야 합니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138페지)

최근 초공간력학계리론에서는 X가 콤팍트거리공간이고 f는 X우에서 정의된 련속넘기기라고 할 때 기초계 $(X,\ f)$와 그것의 모임값연장의 동력학적성질들사이의 관계가 많이 연구되고있다.[1－4]

선행연구[2]에서는 초공간에로 유도된 구간넘기기 $\tilde{f}$의 $\omega-$극한모임이 1개의 불퇴화련결성분을 가진다면 이 모임은 유한개의 불퇴화이고 주기순환하는 구간들로 이루어진다는것을 증명하였으며 $\omega-$극한모임의 구조가 서로 비슷하면서 구간동력학계의 단순한 확장으로 되는 계들(실례로 원둘레, 나무, 빗적넘기기 등)에 대하여서도 류사한 결과들이 얻어질것이라고 예상하였다.

선행연구[4]에서는 위상이행적인 그라프넘기기에 대하여 유도된 모임값연장넘기기의 $\omega-$극한모임의 구조가 구간넘기기의 모임값연장의 $\omega-$극한모임의 구조와 류사하다는것을 밝혔다.

선행연구[3]에서는 일반적인 콤팍트계에 대하여 주어진 계가 위상이행성보다 더 강한 조건인 혼합정규주기분해를 가진다는 가정하에서 그것에 의하여 확장된 모호계의 동력학적성질들을 해석하였으며 두 계의 위상적엔트로피가 같다는것을 증명하였다.

론문에서는 선행연구[2]에서 기대하였던것과는 달리 원둘레넘기기의 모임값연장의 $\omega-$모임의 구조가 구간넘기기의 모임값연장의 $\omega-$극한모임의 구조와 다르다는것을 밝혔다. 이것은 원둘레넘기기의 $\omega-$극한모임의 구조가 구간넘기기의 $\omega-$극한모임의 구조와 비슷하다 하더라도 이 넘기기들에 의하여 유도된 모임값연장들의 $\omega-$극한모임의 구조는 본질적인 차이를 가진다는것을 의미한다.

따라서 론문에서는 일반적인 원둘레넘기기에 대하여서는 초공간에로 유도된 모임값연장넘기기의 $\omega-$극한모임이 불퇴화련결성분을 가져도 유한개로 이루어지지 않는 경우가 있다는것을 밝혔으며 또한 어떤 조건을 만족시킬 때 초공간에로 유도된 모임값연장넘기기의 $\omega-$극한모임이 유한개의 불퇴화순환부분으로 이루어지는가 하는 문제를 해명하였다.

1. 예 비 지 식

리산동력학계는 비지 않은 모임 X와 넘기기 $f: X\to X$의 쌍 $(X,\ f)$로 이루어진다. X가 위상공간(또는 콤팍트)이고 f가 련속일 때(즉 $f\in C(X)$) 쌍 $(X,\ f)$를(간단히 f를) 위상(또는 콤팍트)동력학계라고 부른다.

보조정리 1[1] H를 구간 I의 련결인 부분모임이라고 하고 $E=\bigcup_{k\ge 0} f^k(H)$라고 하자. 그러면 E의 련결성분들은 $f^k(H)(k\ge 0)$이거나 어떤 옹근수 $m\ge 0$과 $p>0$이 있어서 E의 련결성분들은 $f^k(H)(0\le k<m)$와 $E_j := \bigcup_{k\ge 0} f^{m+j+kp}(H)$ $(0\le j<p)$들로 된다.

주의 1 이 정리는 일반적으로 련결인 콤팍트동력학계에 대하여 성립한다.

위상동력학계 $(X,\ f)$와 주어진 점 $x\in X$에 대하여 x의 n번째 반복상은 다음과 같이 귀납적으로 정의된다.

$$f^0(x)=x,\ \ f^{n+1}=f(f^n(x)),\ n\in \mathbf{N}$$

x의 모든 반복상들의 렬 $\{f^n(x)\}_{n\in \mathbf{Z}^+}$를 x의 궤도라고 부르고 x의 궤도의 모든 집적점들의 모임을 x의 $\omega-$극한모임이라고 부르며 $\omega(x,f)$로 표시한다. 모임 $A\subseteq X$는 $f(A)\subseteq A$ $(f(A)=A)$일 때 $f-$불변(엄격한 $f-$불변)이라고 부른다. X가 콤팍트일 때 임의의 x의 $\omega-$극한모임은 엄격히 $f-$불변이며 다음의 사실이 성립한다는것이 알려져있다.[3, 4] 임의의 $n\in \mathbf{N}$에 대하여

$$\omega(x,f)=\bigcup_{j=0}^{n-1}\omega(f^j(x),\ f^n) \tag{1}$$

$$f(\omega(x,f^n))=\omega(f(x),\ f^n) \tag{2}$$

이 성립한다.[1, 4]

$(X,\ d)$를 거리공간, $f:X\to X$를 련속이라고 하자. 다음의 초공간들을 생각하자.

$$K(X)=\{K\subseteq X\,|\,K\text{는 비지 않은 콤팍트모임}\}$$

$$K_c(X)=\{K\subseteq X\,|\,K\text{는 비지 않은 련결콤팍트모임}\}$$

이 공간들에 다음의 식으로 정의되는 하우스돌프거리 D_X[4]를 도입할수 있다.

$$D_X(A,\ B)=\max\{d(A,\ B),\ d(B,\ A)\}$$

여기서

$$d(A,\ B)=\max\{d(a,\ B):a\in A\}$$

$$d(a,\ B)=\min\{d(a,\ b):b\in B\}$$

이다.

론문에서는 f에 의하여 유도된 다음의 두가지 모임값연장넘기기 $\bar{f}:K(X)\to K(X)$와 $\tilde{f}:K_c(X)\to K_c(X)$를 연구한다. 즉

$$\bar{f}(K)=f(K)=\{y\in X\,|\,f(x)=y,\ \exists x\in K\},\ \ \forall K\in K(X)$$

$$\tilde{f}:=\bar{f}|_{K_c(X)}$$

를 고찰한다. 따라서 $(X,\ f)$로부터 유도된 두 모임값동력학계 $(K(X),\ \bar{f})$와 $(K_c(X),\ \tilde{f})$를 얻는다.

그라프와 그라프넘기기의 정의를 상기하자. 콤팍트련결거리공간 G에 대하여 어떤 유한부분모임 $V\subset G$가 있어서 $G\setminus V$의 임의의 련결성분이 열린구간과 위상동형일 때 G를 그라프라고 부른다. 비지 않은 모임의 농도가 1보다 클 때 그 모임을 불퇴화모임이라

고 부른다. 그라프 G에 대하여 련속넘기기 $f:G\to G$를 그라프넘기기라고 부른다.

단위원 S는 단위구간의 0과 1을 동일시하여 얻을수 있다. 즉

$$S=[0,\ 1]/\sim$$

이다. 여기서 ~은 0과 1만을 동일시하는 동등관계를 나타낸다. 구간 $[0,\ 1]$의 자연거리는 S에서의 거리를 유도한다.[3] 구체적으로

$$d(x,\ y)=\min(|x-y|,\ 1-|x-y|)$$

이다. S의 참인 련결모임을 구간이라고 부른다.

원둘레회전넘기기 $R_\alpha:S\to S$는 다음과 같이 정의한다.

$$R_\alpha x=x+\alpha \bmod 1$$

여기서 $x+\alpha \bmod 1$은 $x+\alpha$의 소수부이다. 만일 α가 유리(무리)수이면 R_α를 유리(무리)수회전넘기기라고 부른다.

2. 초공간우로 유도된 원둘레넘기기의 $\omega-$극한모임

일반적으로 원둘레넘기기에 대하여서는 선행연구[2]의 정리 1에서와 같은 결과가 성립하지 않는다. 여기서는 우선 선행연구[2]에서 기대하였던것이 원둘레넘기기에 대하여서는 성립하지 않는다는것을 보여주며 다음으로 일반적인 원둘레넘기기가 어떤 조건을 만족시켜야 선행연구[2]의 정리 1과 같은 초공간력학계의 $\omega-$극한모임의 구조와 같아지는가를 보기로 한다.

실례 1 무리수회전넘기기 $R_\alpha:S\to S$를 생각하자. $J=[a^*,\ b^*]$를 길이가 $I=[a,\ b]$와 같은 임의의 구간이라고 하자. R_α가 위상이행적이므로

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon\in\mathbf{N},\ d(a^*,\ R_\alpha^{n_\varepsilon}(a))<\varepsilon$$

이 성립한다. R_α가 등거리넘기기이므로 $d(b^*,\ R_\alpha^{n_\varepsilon}(b))<\varepsilon$이 성립한다. 이로부터 $D_S(J,\ R_\alpha^{n_\varepsilon}(I))<\varepsilon$이므로 $J\in\omega(I,\ \tilde{R}_\alpha)$이다.

주의 2 실례 1로부터 어떤 원둘레력학계에 대하여 I의 $\omega-$극한모임이 불퇴화구간을 포함하지만 이것은 순환되는 유한개의 불퇴화구간들로 이루어져있지 않다는것을 알수 있다. 이것은 구간력학계에서 성립하던것이 원둘레넘기기에 대하여서는 다르게 성립된다는것을 의미한다.

아래의 보조정리는 초공간에로 유도된 원둘레넘기기에 대하여 $\omega-$극한모임이 불퇴화련결성분을 가질 때 유한개의 불퇴화련결성분을 가지기 위한 조건들을 보여준다.

보조정리 2 $f:S\to S$를 원둘레넘기기, $\tilde{\omega}$을 닫긴구간 I의 $\tilde{f}$에 관한 $\omega-$극한모임으로서 불퇴화련결성분 w를 원소로 포함한다고 하자. 이때 어떤 $m,n\in\mathbf{N}$이 있어서 다음의 조건

$$f^n(I)\subset f^m(I)\ (n\neq m)$$

또는

$$\bigcup_{k\geq 0} f^{m+nk}(I)\neq S$$

를 만족시킬 때 $\tilde{\omega}$는 유한개의 불퇴화순환련결성분들로 이루어진다.

증명 $\exists m,\ n\in\mathbf{N}$, $f^n(I)\subset f^m(I),\ n\neq m$ 인 경우

우선 $n<m$ 인 경우를 고찰하자. $g:=f^{m-n}$, $J:=f^n(I)$ 라고 하자. 그러면 임의의 $k\geq 0$ 에 대하여

$$g^k(J)\subset g^{k+1}(J)$$

이고 이것은

$$\omega(J,\ \tilde{g})=\left\{\bigcup_{k\geq 0}g^k(J)\right\}$$

라는것을 의미한다. 식 (1)과 (2)로부터

$$\omega(\tilde{f}^n(I),\ \tilde{f})=\bigcup_{k=0}^{m-n-1}\omega(\tilde{f}^k(J),\ \tilde{f}^{m-n})=\bigcup_{k=0}^{m-n-1}\tilde{f}^k(\omega(J,\ \tilde{g}))$$

이다. 이것은 $\#\omega(I,\ \tilde{f})\leq m-n$ 이라는것을 보여준다.

$n>m$ 인 경우에도 류사하게 증명할수 있다.

다만 여기서 $\omega(J,\ \tilde{g})=\left\{\bigcap_{k=0}^{m-n-1}g^k(J)\right\}$ 이다.

$\exists m,\ n\in\mathbf{N}$, $\bigcup_{k\geq 0}f^{m+nk}(I)\neq S$ 인 경우

$g=f^{m-n}$, $J=f^n(I)$ 라고 하고 $A:=\bigcup_{k\geq 0}f^{m+nk}(I)=\bigcup_{k\geq 0}g^k(J)$ 로 놓자.

$\mathrm{int}\,w$ 는 달아나지 않는 모임[1]이다. 보조정리 1로부터 A 의 련결성분들은 어떤 $m'\geq 0$ 과 $p>0$ 이 존재하여 $J,\ g(J),\ \cdots,\ g^{m'}(J)$ 와 $E_j=\bigcup_{k\geq 0}g^{m'+kp+j}(J)\quad(0\leq j<p)$ 로 된다.

분명히 E_j 는 g^p-불변구간이다. 더우기

$$\omega(J,\ g)=\omega(g^{m'}(J),\ g),\ g^{m'}(J)\subset E_0$$

이다. $g^p:E_0\to E_0$ 이 구간넘기기라는것은 명백하다. 선행연구[4]의 정리 1로부터 $\omega(g^{m'}(J),\ g^p)$ 는 유한개의 불퇴화순환구간들로 이루어진다.

한편 식 (1), (2)를 적용하면

$$\omega(I,\ \tilde{f})=\omega(f^n(I),\ \tilde{f})=\bigcup_{i=0}^{m-1}f^i(\omega(J,\ \tilde{f}^m))=\bigcup_{i=0}^{m-1}\tilde{f}^i(\omega(J,\ \tilde{g}))=$$

$$=\bigcup_{i=0}^{m-1}\tilde{f}^i(\omega(g^{m'}(J),\ \tilde{g}))=\bigcup_{i=0}^{m-1}\tilde{f}^i\left(\bigcup_{j=0}^{p-1}\tilde{g}^j(\omega(g^{m'}(J),\ \tilde{g}^p))\right)$$

이다. 따라서 $\#\omega(I,\ \tilde{f})\leq mp\cdot\#\omega(g^{m'}(J),\ \tilde{g}^p)$ 이다.(증명끝)

보조정리 2의 직접적인 따름으로 다음의 결과가 성립한다.

정리 $f:S\to S$ 를 원둘레넘기기, $I\in K_c(S)$ 가 아래의 조건들중 적어도 하나를 만족시킨다고 하자.

① 서로 다른 자연수 $n,\ m$ 이 있어서 $f^n(I)\subset f^m(I)$ 이다.

② 2개의 자연수 $n,\ m$이 있어서 $\bigcup_{k\ge 0} f^{m+nk}(I)\ne S$이다.

그러면 아래의 결과들중 꼭 하나의 결과가 성립한다.

① 어떤 점 $x\in S$가 있어서 $\omega(I,\ \tilde{f})=\omega(\{x\},\ \tilde{f})$이다.

② $\omega(I,\ \tilde{f})$은 $\tilde{f}$에 의하여 순환되는 유한개의 불퇴화련결성분들로 이루어진다.

실례 2 다음과 같이 정의되는 넘기기 $f:S\to S$를 생각하자.

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x<1/2\\ -2x+2\bmod 1, & 1/2\le x<1\end{cases}$$

어떤 $n,\ k\in\mathbf{N}$이 있어서 $\frac{k}{2^n}\in I$가 성립한다. $f^n\left(\frac{k}{2^n}\right)=0$이므로 $f^n(I)$는 0을 포함하는 구간으로 된다. f의 정의로부터 $f^{n+1}(I)=[0,\ c]$라는것을 알수 있다. 그러므로 분명히 $f^{n+1}(I)\subset f^{n+2}(I)$가 성립한다. 이로부터 매 $I\in K_c(S)$는 정리의 조건 ①을 만족시킨다. 사실 f의 정의로부터 I의 $\tilde{f}$에 관한 $\omega-$극한점은 S로서 유일하다.

참 고 문 헌

[1] L. Block et a1.; Dynamics in One Dimension, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, 69～88, 220～234, 1992.

[2] J. S. Canovas et a1.; Fuzzy Sets Syst., 257, 132, 2014.

[3] Cholsan Kim et a1.; Fuzzy Sets Syst., 319, 93, 2017.

[4] D. Kwietniak et a1.; Chaos Solitons & Fractals, 33, 76, 2007.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

An $\omega-$Limit Set of Induced Circle Map on Hyperspace

Ri Song Hun, Ju Hyon Hui

In this paper, we recognize that an $\omega-$limit set of the set-valued extension of an induced circle map on hyperspace has infinitely many nondegenerate connected components. And also we find some conditions that the $\omega-$limit set of the induced circle map on hyperspace has the finitely many nondegenerate connected components.

Key words : hyperspace, circle map, $\omega-$limit set

김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

화상국부령역특징을 리용한 방향성마당내 보간순차화방법의 개선

조동철, 리철균

론문에서는 간차식동영상을 순차식동영상으로 변환하는 마당내보간순차화방법에 대하여 연구하였다.

선행연구[2－5]에서 제기된 선반복법(LR), 선평균법(LA), 경계기반선평균법(ELA)과 방향성마당내보간법(DOI)들은 속도가 빠르거나 경계처리를 보다 개선하지만 화상경계에서 뚜렷한 계단효과가 나타나거나 경계방향추정이 안정하지 못하며 잡음이 많이 나타나는 부족점들을 가지고있다.

선행연구[1]에서는 우의 선행방법들의 부족점들을 극복하기 위하여 경계방향추정문제를 최대사후확률추정문제에 귀착시키고 베이스방법에 의하여 사후확률이 최대로 되는 방향을 찾아 그 방향에 따르는 보간을 진행하는 한가지 방향성마당내보간법을 제기하였다. 그러나 이 방법은 방향성마당내보간법(DOI)에 비하여 경계방향추정이 보다 안정해지지만 반복무늬가 있거나 수평경계가 있는 구역에서의 보간결과가 안정하지 못한 부족점을 가지고있다.

론문에서는 선행연구[1]에서 나타난 부족점들을 해결하기 위하여 화상의 국부령역의 정보를 추출하여 리용하며 수평경계령역과 평탄한 령역에서의 보간을 보다 안정화하기 위한 방법을 구성하고 실험을 통하여 그 효과성을 평가하였다. 또한 선행연구[1]에서 수평경계에 대한 처리를 해주지 않은것으로 하여 나타난 결함을 극복하기 위하여 새로운 수평경계판정기준을 도입하고 이 기준에 의하여 평탄성(무경계성)도 판정하였다.

그 기준은 보간하려는 점의 웃줄의 5개 점들의 분산과 아래줄의 5개 점들의 분산이다. 보간하려는 점의 근방이 평탄한 령역이거나 수평경계라면 두 분산이 다 작을것이다. 따라서 론문에서는 두 분산이 다 어떠한 턱값보다 작으면 수평 및 평탄으로 보았으며 이를 하나의 새로운 방향클라스로 보고 선행연구[1]에서 제시된 17개 방향클라스에 추가하였으며 18개 방향클라스에 대하여 클라스사후확률이 큰 클라스에 따르는 보간을 진행하였다. 턱값은 실험을 통하여 4로 설정하였다.

$\mathrm{Var_1}$: 보간하려는 점의 웃줄의 5개 점($U_0(i+t)$ $(t=\overline{-2,\ 2})$)들의 분산

$\mathrm{Var_2}$: 보간하려는 점의 아래줄의 5개 점($L_0(i+t)$ $(t=\overline{-2,\ 2})$)들의 분산

$\mathrm{Var_1}<\mathrm{thr},\ \mathrm{Var_2}<\mathrm{thr}$이면 수평이거나 평탄블로크라고 보겠다.

$w_k,\ k=18$: $\mathrm{Var_1}<\mathrm{thr},\ \mathrm{Var_2}<\mathrm{thr}$일 사건 즉 보간하려는 점에서의 경계방향이 수평이거나 경계가 없는 평탄한 구역일 사건(여기서 $\mathrm{thr}=4$로 설정함)

$w_k,\ k=1\sim17$: $\mathrm{Var_1}\geq\mathrm{thr}$이거나 $\mathrm{Var_2}\geq\mathrm{thr}$이면서(즉 보간하려는 점에서의 경계방향이 수평이 아니거나 평탄한 구역이 아니면서) 웃줄의 17개 점들($U_0(i+t)$ $(t=\overline{-8,\ 8})$)중 k번째 점이 $X(i)$와 화소값이 제일 류사할 사건 다시말하여 17개 점들중 k번째 점이 보

간에 참가할 사건, A: 보간하려는 점의 2*3근방 $\begin{pmatrix} U_0(i-1) & U_0(i) & U_0(i+1) \\ L_0(i-1) & L_0(i) & L_0(i+1) \end{pmatrix}$ 과 웃줄의 17개 방향에서의 2*3블로크 $\begin{pmatrix} U_1(i-1+2^*k) & U_1(i+2^*k) & U_1(i+1+2^*k) \\ U_0(i-1+2^*k) & U_0(i+2^*k) & U_0(i+1+2^*k) \end{pmatrix}$ $(k=\overline{-8,\ 8})$ 들의 차(6차원벡토르)들 그리고 보간하려는 점의 2*3근방과 량옆의 적당한 4개 점의 2*3근방

$$\begin{pmatrix} U_0(i+t) & U_0(i+t+1) & U_0(i+t+2) \\ L_0(i+t) & L_0(i+t+1) & L_0(i+t+2) \end{pmatrix} \quad (t=-5,\ -3,\ 1,\ 3)$$

들의 차(6차원벡토르)들을 나란히 붙여만든 126(=21*6)차원관측벡토르라고 하자.

다음으로 HOG정보 B 를 보간하려는 점의 5*5근방의 25개 미지점 및 기지점의 그라디엔트에 대하여 향방히스토그람을 계산하여 얻는다. 그라디엔트의 향방각의 범위를 $[0,\ \pi)$ 로 하며 보간하려는 점의 5*5근방의 25개 점에 대하여 π 구간을 5등분하여 히스토그람을 계산한다.

매 미지점의 그라디엔트는 다음과 같이 계산한다.

x 축방향변위와 y 축방향변위를

$$\Delta x_1 = \frac{L_0(i+1)-U_0(i-1)}{2\sqrt{2}},\ \ \Delta y_1 = \frac{L_0(i-1)-U_0(i+1)}{2\sqrt{2}}$$

로 보고 그라디엔트의 크기와 향방각을

$$|\,\mathrm{grad}_1| = \sqrt{\Delta x_1{}^2 + \Delta y_1{}^2},\ \ \arg(\mathrm{grad}_1) = \arctan\left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}\right) + \frac{\pi}{4}$$

로 정한다. 또한 x 축방향변위와 y 축방향변위를

$$\Delta x_2 = \frac{U_0(i+1)-U_0(i-1)+L_0(i+1)-L_0(i-1)}{4},\ \ \Delta y_2 = \frac{L_0(i)-U_0(i)}{2}$$

로 보고 그라디엔트의 크기와 향방각을

$$|\,\mathrm{grad}_2| = \sqrt{\Delta x_2{}^2 + \Delta y_2{}^2},\ \ \arg(\mathrm{grad}_2) = \arctan\left(\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}\right)$$

로 정한다. 그다음 미지점의 그라디엔트는 2개의 그라디엔트중 절대값이 큰것으로 하며 그것의 향방각이 $[0,\ \pi)$ 구간에 놓이도록 한다.

매 기지점의 그라디엔트는 다음과 같이 계산한다.

x 축방향변위와 y 축방향변위를

$$\Delta x = \frac{U_0(i+1)-U_0(i-1)}{2},\ \ \Delta y = \frac{L_0(i)-U_1(i)}{4}$$

로 보고 그라디엔트의 크기와 향방각을

$$|\,\mathrm{grad}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},\ \ \arg(\mathrm{grad}) = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

로 정한다. 향방각은 $[0,\ \pi)$ 구간에 놓이도록 한다.

그다음 $X(i)$ 의 5*5근방의 25개 점의 그라디엔트에 대하여 그것의 히스토그람을 계산한다. 히스토그람은 $[0,\ \pi)$ 구간을 5등분한 매 부분구간(bin)에 향방각이 놓이는 그라디엔트의 크기를 루적하고 총합으로 나누어 계산한다. 얻어진 5차원그라디엔트히스토그람벡

토르를 B (HOG－5차원벡토르)라고 표시한다.

론문에서는 베이스방법을 리용하여 매 점에서의 경계방향을 추정한다. 따라서 경계방향을 찾는 문제는 최대우도추정문제 즉 $P(w_k | A \cap B)$ 가 최대인 k 를 결정하는 문제에 귀착된다.[1]

$$\tilde{k} = \arg\max_{1 \le k \le 18} P(w_k | A \cap B) \tag{1}$$

한편 베이스사후확률공식으로부터 다음식이 성립한다.

$$P(w_k | A \cap B) = \frac{P(w_k) P(A \cap B | w_k)}{P(A \cap B)} \quad (k = \overline{1,\ 18}) \tag{2}$$

여기서 $P(w_{18})$ 은 미지점근방이 평탄이거나 경계방향이 수평일 확률이고 $P(w_k)$ $(k = \overline{1,\ 17})$ 는 평탄이 아니거나 수평경계가 아닐 때 웃줄의 17개 점들중 k 번째 점이 미지점과 제일 가까울 확률이며 $P(A \cap B | w_k)$ 는 조건부확률함수 즉 18개 클라스들중 k 번째 클라스가 선택되였을 때 131(=21*6+5)차원관측벡토르 $A \cap B$ 가 얻어질 확률함수이다.

이로부터 $P(w_k | A \cap B)$ 의 최대우도추정문제는 최대사후확률추정문제로 귀착된다. 즉

$$\tilde{k} = \arg\max_{1 \le k \le 18} P(w_k) P(A \cap B | w_k) \tag{3}$$

이다. 웃식에 의하여 경계방향을 추정하자면 사전확률 $P(w_k)$ 와 조건부확률 $P(A \cap B | w_k)$ 를 계산하여야 한다. 아래에서는 이것들의 추정방법에 대하여 서술한다.[1]

기둥도표법으로 사전확률 $P(w_k)$ 를 추정한다.

$P(A \cap B | w_k)$ 도 기본적으로 선행연구[1]에서와 같이 추정한다. 먼저 126차원관측벡토르 A 를 주성분분석에 의하여 30차원으로 변환하고 그뒤에 5차원벡토르 B 를 덧붙여 만든 35차원벡토르에 대하여 $P(A \cap B | w_k)$ 를 다차원정규분포로 보고 파라메터추정한다. 주성분분석의 변환행렬 $Trans_Mat$ (126∗30)을 계산한다. 다음으로 $Trans_Mat$ (126∗30)에 의하여 126차원벡토르를 다음과 같이 변환하자.

$$A_1 = Trans_Mat^{\mathrm{T}} \times A \tag{4}$$

30차원벡토르 A_1 의 뒤에 5차원벡토르 B 를 덧붙여 만든 35차원벡토르를 C 라고 하자. 이때 공분산행렬은 다음과 같이 계산한다.

$$\Sigma_k = E[(C - \mu)(C - \mu)^{\mathrm{T}}] \quad (k = \overline{1,\ 18}) \tag{5}$$

여기서 $\mu = E[C]$ 이다.

다음

$$P(A \cap B | w_k) = \frac{1}{(2\pi)^{35/2} |\Sigma_k|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (C - \mu)^{\mathrm{T}} \Sigma_k^{-1} (C - \mu) \right) \quad (k = \overline{1,\ 18}) \tag{6}$$

에 따라 조건부확률함수 $P(A \cap B | w_k)$ 를 계산한다.

최대사후확률추정에 따라 보간하려는 점의 웃줄에서 선택된 방향을 k_0 이라고 하자.

우의 방법과 마찬가지로 아래줄에 대하여 최대사후확률을 추정하여 찾아진 아래방향을 k_1 이라고 하자. 이제 다음과 같이 방향에 따르는 보간을 진행한다.

$$X(i)=\begin{cases}\dfrac{U_0(i+k_0)+L_0(i+k_1)}{2}, & (k_0-9)+(k_1-9)=0\\ \dfrac{U_0(i)+L_0(i)}{2}, & \text{기타}\end{cases}\qquad(7)$$

론문에서 제기한 방법의 효과성을 검증하기 위하여 6개의 실험화상(ㄱ—ㅂ)들에 대하여 론문에서 제기한 방법과 선행연구들에서 제기한 두가지 방법의 결과를 비교하였다.

세가지 방법의 성능을 PSNR에 의하여 다음의 표에서 보여준다.(표)

표. PSNR에 의한 세가지 방법의 성능비교

화상자료	DOI	선행연구[1]에서 제기한 방법	론문에서 제기한 방법
ㄱ	38.906 0	38.756 3	39.161 6
ㄴ	36.649 8	36.721 7	37.151 6
ㄷ	36.372 2	35.898 1	36.662
ㄹ	35.941 3	35.912 7	36.452 0
ㅁ	32.646 6	34.849 2	35.309 8
ㅂ	36.472 1	36.315 9	37.057 8
평균	36.164 7	36.409 0	36.965 8

표에서 보는바와 같이 여러가지 특성을 가진 화상들에 대하여 순차화를 진행할 때 론문에서 제기한 방법의 보간오차가 가장 작다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학 65, 1, 31, 주체108(2019).

[2] E. B. Bellers et a1.; Circ. Syst. and Sig. Proc., 27, 28, 7, 1996.

[3] Y. Biet a1.; Communic. Comp. Informat. Science Book Series(CCIS), 685, 12, 2016.

[4] T. Chen et a1.; Visual Communications and Image Processing, 4067, 1551, 2000.

[5] L. Zheng et a1.; Speech and Signal Processing, 13, 335, 1998.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

Improved DOI Intra-Field Deinterlacing Method using Image Local Regional Features

Jo Tong Chol, Ri Chol Gyun

In this paper, we propose an approach to improve DOI intra-field deinterlacing method using Bayes estimation. It is showed that this method outperforms prior results through our experiments.

Key words: Bayes estimation, intra-field interpolation, deinterlacing

김일성종합대학학보 수 학 | 주체108(2019)년 제65권 제4호

$E(s^2)$ 최량초포화계획을 리용한 불완전2차2수준 유효초포화계획구성법

김철옥, 김철호

최근에 실험회수를 줄이기 위한 실험계획적연구가 심화되면서 2차초포화계획에 대한 연구가 많이 진행되고있다.

선행연구[2]에서는 완전2차회귀모형에 대한 한가지 3수준계획으로서 합리적인 초포화계획의 구성법을, 선행연구[3]에서는 불완전2차회귀모형에 대한 합리적인 초포화계획으로서 2수준홀더브계획의 구성법들을, 선행연구[4, 5]에서는 같은 모형에서 주효과와 얽힘효과를 추정하기 위한 합리적인 초포화계획의 구성법들을, 선행연구[1]에서는 몇가지 2수준초포화계획들의 구성법을 연구하였다.

론문에서는 $E(s^2)$ 최량초포화계획의 구성법과 그것의 성질을 리용하여 불완전2차회귀모형에 대한 2수준유효초포화계획의 구성법을 연구하였다.

불완전2차회귀모형

$$y=\beta_0+\sum_{i=1'}^{k}\beta_t x_t+\sum_{j<j}^{k}\beta_{ij}x_i x_j+\varepsilon,\ \varepsilon : N(0,\ \sigma^2) \tag{1}$$

에 대하여 계획구역

$$\Lambda=\{(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_k):x_i\in\{+1,-1\},\ i=1,\ 2,\cdots,\ k\} \tag{2}$$

에서의 합리적인 초포화계획을 구성하는 방법을 보기로 하자.

$$D(N)=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1}\\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{kN}\end{pmatrix} \tag{3}$$

을 모형 (1)에 대한 계획(행렬)이라고 하면 불완전2차회귀모형에 대한 미지파라메터개수는 $m=1+[(k+1)k]/2$ 이다. 그리고 인자 $x_{i\alpha}$ 들이 가지는 동일한 수준수가 2이므로 $N<m$ 이면 계획 (3)은 모형 (1)에 대한 구역 (2)에서의 초포화계획이다.

이제 계획행렬의 합리성을 위한 유효성기준에 대하여 보기로 하자.

모형 (1)에 대한 독립변수행렬은 $\tilde{D}=(D:D_1)$ 이다. 여기서 $D=(1:D_1)$ 은 $(N\times(k+1))$ 형행렬이고 D_1 은 차모형의 얽힘항에 대응되는 $(N\times k(k-1)/2)$ 형행렬이다.

모형 (1)을 행렬모형으로 바꾸어쓰면

$$y=D\theta_1+D_1\theta_2+\varepsilon \tag{4}$$

으로 된다. 여기서 $\theta_1=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\ \beta_k)^{\mathrm{T}}$, $\theta_2=(\beta_{12},\beta_{13},\ \cdots,\ \beta_{k-1,\ k})^{\mathrm{T}}$ 이다.

1차주효과모형 $y=D\theta_1+\varepsilon$ 에서 θ_1 의 최소두제곱추정량을 구하면 $\hat{\theta}_1=(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}D^{\mathrm{T}}y$ 이며 모형 (4)를 리용하면 $E\hat{\theta}_1=\theta_1+A\theta_2$ 로 된다. 여기서 $A=(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}D^{\mathrm{T}}D_1$ 이다.

이때 θ_1에 대한 불편추정량을 구하자면 $A=0$이여야 한다. $A=0$이려면 계획행렬 D와 D_1에 대하여 $D^{\mathrm{T}}D_1=0$이면 충분하다.

한편 1차주효과추정에서 정확도를 높이자면 계획행렬 $D(N)$에 관하여 $D-$최량성기준으로서 $\det(D_0^{\mathrm{T}}D_0)$을 최대로 하여야 한다.

정의 1 완전2차회귀모형 (1)에 대한 계획 (2)에 대하여 다음의 조건들을 만족시키는 계획을 2차유효초포화계획이라고 부른다.

① $A=0$

② $D-$최량계획 D_{0*}에 관하여 $[\det(D_0^{\mathrm{T}}D_0)/\det(D_{0*}^{\mathrm{T}}D_{0*})]^{1/p}\Rightarrow \max\ \ (p=k+1)$이다.

정의 1에서 조건 ①은 2차유효초포화계획이 불완전2차회귀모형에서 1차주효과들의 추정을 얽힘효과들과 독립적으로 추정할수 있게 한다는것이며 조건 ②는 2차유효초포화계획이 1차주효과들에 관하여 $D-$최량성기준의 의미에서 좋은 계획이라는것이다.

정의 2[1] 0, 1을 원소로 가지는 $(n\times m)$ 형행렬 $B=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{m1}\\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{m2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{mn}\end{pmatrix}$이 조건

$$\begin{cases}\sum_{\alpha=1}^{n}x_{i\alpha}=k, & (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\\ \sum_{i=1}^{m}x_{i\alpha}=r, & (\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\\ \sum_{i=1}^{m}x_{i\alpha}x_{i\beta}=\lambda & (\alpha\neq\beta,\ \alpha,\ \beta=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\end{cases}$$

를 만족시킬 때 B를 파라메터 $n,\ m,\ k,\ r,\ \lambda$를 가지는 BIBD계획이라고 부르고 BIBD$(n,\ m,\ k,\ r,\ \lambda)$로 표시한다.

정의 3[1] 시초블로크의 순환에 의하여 만들어지는 0, 1을 원소로 가지는 n차행렬

$$N=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1}\\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn}\end{pmatrix}$$

이 조건

$$\begin{cases}\sum_{\alpha=1}^{n}x_{i\alpha}=k & (i=1,2,\cdots,\ m)\\ \sum_{i=1}^{n}x_{i\alpha}=k & (\alpha=1,2,\cdots,\ n)\end{cases}$$

를 만족시킬 때 N을 $(n,\ k,\ k)$형순환계획행렬이라고 부른다.

보조정리[1] $(n,\ m)=(2k+2,\ t(2k+1))$인 경우에 $E(s^2)$ 최량초포화계획의 존재성과 BIBD$(2k+2,\ t(2k+1),\ k-1,\ t(k-1),\ t(k-2)/2)$의 존재성은 서로 동등하며 이러한 BIBD는 존재한다. 여기서 $k\geq 3$이고 t는 짝수이다.

$(n,\ m)=(2k+2,\ t(2k+1))$일 때 $(n\times m)$형초포화계획 X가 $E(s^2)$ 최량이기 위해서는

$$XX^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} m & -t & \cdots & -t\\ -t & m & \cdots & -t\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -t & -t & \cdots & m\end{pmatrix}$$

일것이 필요하고 충분하다.

정리 X가 $t<(k+1)/2+1/k$을 만족시키는 짝수 t에 관한 다음과 같은 $(k\times t(k-1))$형 $E(s^2)$최량초포화계획이라고 하자.

$$D=\begin{pmatrix} X^{\mathrm{T}} \\ Y \end{pmatrix} \tag{5}$$

여기서 Y는 $t/2$개 행은 +1, 나머지 $t/2$개 행은 -1을 원소로 가지는 $(t\times k)$형행렬이다.

그러면 계획 (5)는 모형 (1)에 대한 구역 (2)에서의 2수준유효초포화계획이다.

증명 먼저 계획 (5)의 초포화성을 보자.

계획 (5)의 실험점개수 N은 $N=t(k-1)+t=tk$이며 모형 (1)의 파라메터개수는 $m=k(k+1)/2+1$이므로 조건 $t<(k+1)/2+1/k$로부터 $N>m$은 성립된다.

다음 계획 (5)가 직교계획이라는것을 보자.

X가 $E(s^2)$최량초포화계획이므로 보조정리로부터

$$XX^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} t(k-1) & -t & \cdots & -t \\ -t & t(k-1) & \cdots & -t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -t & -t & \cdots & t(k-1) \end{pmatrix}$$

이며 행렬 Y의 표시를 고려하면

$$D^{\mathrm{T}}D=\begin{pmatrix} X^{\mathrm{T}} \\ Y \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}(X^{\mathrm{T}}:Y)=(XX^{\mathrm{T}})+(Y^{\mathrm{T}}Y)=\begin{pmatrix} tk & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & tk & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & tk \end{pmatrix} \tag{6}$$

임을 알수 있다. 이것은 계획 (5)에 대하여

$$\sum_{\alpha=1}^{tk} x_{i\alpha}x_{j\alpha}=0,\ i\neq j,\quad \sum_{\alpha=1}^{tk} x_{i\alpha}^2=tk \tag{7}$$

이며 이때 계획 X의 BIBD의 성질로부터 계획 (5)의 렬들에 관하여 다음과 같다.

$$\sum_{\alpha=1}^{tk} x_{i\alpha}=0\ \ (i=1,\ 2,\cdots,\ k) \tag{8}$$

한편 식 (7), (8)에 의하여 $A=D^{\mathrm{T}}D_1=0$이 얻어지며 식 (6)으로부터

$$[\det(D_0^{\mathrm{T}}D_0)/\det(D_{0*}^{\mathrm{T}}D_{0*})]^{1/p}=1$$

이므로 $D-$최량성도 나온다.(증명끝)

따름 1 2수준직교표 $L_k(2^r)$에서 수준 1을 $(+1,\ -1)$로, 수준 2를 $(-1,\ +1)$로 바꾸어 놓은 $(k\times 2r)$형행렬을 X라고 하자.

그러면 계획 $D=\begin{pmatrix} X^{\mathrm{T}} \\ +I_k \\ -I_k \end{pmatrix}$는 실험회수가 $N=2r$인 모형 (1)에 대한 구역 (2)에서 2수준유효초포화계획이다. 여기서 $+I_k,\ -I_k$는 k차원행벡토르 즉

$$+I_k=(+1,\ +1,\cdots,\ +1),\ \ -I_k=(-1,-1,\ \cdots,-1).$$

따름 2 N_j ($I=1, 2, \cdots, t$) 를 순환계획행렬들이라고 하면 $N=(N_1, N_2, \cdots, N_t)$ 는 BIBD($2k+1,\ t(2k+1),\ tk,\ t(k-1)/2$) 이며 $X=\begin{pmatrix} I_m \\ N \end{pmatrix}$ 은 $(2k+2,\ t(k+1))$ 형 $E(s^2)$ 최량초포화계획으로 된다. 여기서 I_m 은 모든 원소가 +1인 $m=t(2k+1)$ 차행벡토르이다.

이때 $D=\begin{pmatrix} X^{\mathrm{T}} \\ Y \end{pmatrix}$ 에서 첫렬을 제외한 $(tk\times(k-1))$ 형행렬 $\overline{D}$ 는 실험회수가 $N=tk$ 이고 인자의 개수가 $(k-1)$ 인 모형 (1)에 대한 구역 (2)에서 2수준유효초포화계획이다. 여기서 Y 는 $t/2$개 행은 +1, 나머지 $t/2$개 행은 –1을 원소로 가지는 $(t\times k)$ 형행렬이다.

참 고 문 헌

[1] M. Liua et al.; Journal of Statistical Planning and Inference, 91, 139, 2000.

[2] J. Bradley et al.; Technometrics, 43, 1, 2011.

[3] J. Bradley et al.; Technometrics, 59, 48, 2017.

[4] T. E. Pieter et al.; Technometrics, 59, 69, 2017.

[5] B. Jones et al.; Journal of Quality Technology, 45, 121, 2013.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

Construction of Incomplete Second-Order Two-Level Efficient Supersaturated Design using $E(s^2)$ Optimal Supersaturated Design

Kim Chol Ok, Kim Chol Ho

We establish an efficient supersaturated design for the incomplete second-order regression in two-level design sphere and study the construction method and the property of the incomplete second-order two-level efficient supersaturated design using $E(s^2)$ optimal supersaturated design.

Key words: incomplete second-order regression, efficient supersaturated design

김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

Phong모형에서 개선된 쌍방향반사률함수에 의한 영상생성의 한가지 방법

리정로, 한성

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《첨단돌파전을 힘있게 벌려야 나라의 과학기술전반을 빨리 발전시키고 지식경제의 토대를 구축해나갈수 있습니다.》

3차원영상생성은 과학, 기술, 의학, 교육, 예술, 모의훈련과 같은 여러 분야에 광범히 리용되고있으며 특히 가상현실, 오락제작분야에서 많이 리용되고있다.

3차원영상생성은 오락제작분야에서 처음으로 출현하였다.

초기의 3차원오락에서는 렌더링에 중심을 두고 빠른 속도로 3차원화면을 생성하였으며 현시기 보다 현실에 가까운 내용을 가진 오락들이 출현하였다.

이와 관련하여 물리모형에 기초한 엔진에 대한 요구가 개발자들에게 제기되였으며 현실과 류사하게 표현할수 있는 엔진을 개발하기 위한 연구가 심화되였다. 이 과정에 많은 성과가 이룩되여 엔진개발은 대체로 두가지 방향 즉 현실과 류사한 영상을 얻어내는것과 현실에 구애되지 않는 보다 자유로운 영상을 얻어내는 방향으로 발전하였다.

최근시기에는 물리모형에 기초하여 영상의 품질과 속도를 개선하기 위한 연구가 활발히 진행되고있다.

대표적인 물리모형에 기초한 엔진들로서는 pbrt, render man, mitsuba, lux render, Arnold 등이 있다. 물리모형에 기초한 엔진이라고 할 때에는 물리현상들과 물리법칙에 따라 움직이고 표현되는 물체들을 생성해내는 엔진이다. 실례로 바람이 불 때 바람의 방향과 속도에 따라 나무가지나 머리칼이 흩날리는 세기와 방향을 조절하고 뽈을 찰 때 어느 방향으로 어떤 힘으로 어떤 회전방향으로 찼는가에 따라 그 세기와 방향, 회전을 정확히 표현할수 있는것 등을 들수 있다.

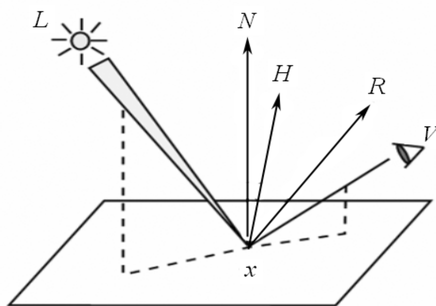


그림. 면의 점 x 에서의 광원방향, 관찰자방향, 법선방향

광원, 면, 관찰자가 주어졌을 때 반사빛의 흐름에 대하여 고찰하자.

반사빛의 복사세기는 광원의 복사비침도와 크기, 면의 반사능력과 재질적특성에 의해 결정되는데 면의 점 x 에서의 광원방향, 관찰자방향, 법선방향은 그림과 같다.

그림에서 L 은 점 x 에서 점광원쪽으로 향하는 단위벡토르, V 는 점 x 에서 관찰자의 눈으로 향하는 단위벡토르, R 는 점 x 에서의 리상적인 거울반사방향의 단위벡토르, N 은 점 x 에서의 면의 법선벡토르, H 는 L 과 V 사이의 중간단위벡토르, β 는 L 과 V 사이의 각, ϕ 는 R 와 V 사이의 각이다.

3차원렌더링에서는 렌더링방정식[1]

$$L(x \to V) = L_e(x \to V) + \int_{\Omega_x} f_r(x,\ L \to V) L(x \leftarrow L)\cos(N,\ L) d\omega_L$$

을 풀어야 한다. 그런데 이 방정식을 해석적으로 계산하는것은 불가능한 일이므로 몽떼－까를로적분을 써서 다음과 같이 계산한다.[1]

$$L(x \to V) = L_e(x \to V) + \frac{1}{n}\sum_i \frac{f_r(x,\ L \to V) L(x \leftarrow L)\cos(N,\ L)}{p(\omega_i)}$$

여기서 $L_e(x \to V)$는 면의 점 x에서 V방향으로 방출되는 빛흐름을 나타낸다.

총적으로 $L(x \to V)$는 V방향으로 향하는 빛흐름을 나타내고 $f_r(x,\ L \to V)$는 쌍방향반사률함수(BRDF)라고 부르며 $f_r(x,\ L \to V) = \frac{dL(x \to V)}{dE(x \leftarrow L)} = \frac{dL(x \to V)}{L(x \leftarrow L)\cos(N,\ L) d\omega_L}$ 과 같이 정의된다.[1] 여기서 $E(x \leftarrow L)$는 점 x에서 L방향에서 입사하는 빛에 대한 비침도이다.

BRDF는 재질마다 고유한 척도로서 얻어낸 영상이 현실과 류사하도록 조절통제하는 수단이다. 이 함수를 실제한 재질과 가깝게 정할수록 질이 높아지게 된다.

BRDF를 근사화한 여러가지 모형들이 제안되였는데 대표적인 모형으로서는 Phong모형[2]을 들수 있는데 이 모형은 거울반사범위를 계산하는 경험적인 모형으로서 거울반사의 세기를 $\cos^n(\phi)$에 비례하도록 설정한다. 이 모형은 완전확산면이 아닌 면들의 특성을 잘 반영하는것으로 하여 제일 광범히 리용되고있는 모형이다.

이 모형의 BRDF는 $f_r(x,\ L \leftrightarrow V) = k_d + k_s \cos^n \phi / \cos(N,\ L)$와 같다. 여기서 k_d는 확산반사률, k_s는 거울반사률이며 n은 거울반사파라메터이다.

Phong모형을 약간 변형시킨 변형된 Phong모형 $f_r(x,\ L \leftrightarrow V) = k_d + k_s \cos^n \phi$도 있다.[2]

거울반사파라메터 n에 할당되는 값은 현시하려는 면의 류형에 의하여 결정된다.

n은 고광택면들에서 큰 값(100 또는 그 이상)으로 모형화되며 보다 무광택인 면들에서는 더 작은 값(1아래)으로 모형화된다. 완전한 반사면에 대하여 n은 무한대이다.

다음으로 거울반사파라메터 n의 여러가지 값에 대한 $\cos^n \phi$곡선에 대하여 보자.

Phong모형을 리용하면 고광택면재질에서 거울반사방향으로부터 멀어지게 될 때 급격히 어두워지게 되는데 이것은 화상의 질을 떨구는 하나의 요인으로 된다.

론문에서는 이 문제를 해결하기 위하여 고광택면재질에서 보다 천천히 어두워지는 BRDF모형을 제안하고 그것을 Phong모형과 비교해보기로 한다.

우리가 제안한 BRDF모형은 $f_r(x,\ L \leftrightarrow V) = k_d + k_s \frac{\cos\phi}{n - (n-1)\cos\phi}$ 와 같다. 여기서 k_d는 확산반사률, k_s는 거울반사률, n은 거울반사파라메터로서 매질에만 관계된다. 즉 n은 매질이 거친가 매끈한가를 나타내는 척도로서 매끈한 면에 대해서는 n이 크며(리상적인 면에 대해서는 무한대) 거친 면에 대해서는 n이 0에 가깝다. 완전확산면에서는 n이 0이다.

이 모형에 의하면 거울반사벡토르 R와 반사벡토르 V사이의 각 ϕ가 클수록 거울반사의 량이 작아지게 된다. 즉 $\frac{\cos\phi}{n - (n-1)\cos\phi} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{n}{n - (n-1)\cos\phi} - 1\right)$이다.

ϕ가 클수록 $\cos\phi$가 작아지고 $\cos\phi / [n - (n-1)\cos\phi]$가 작아지게 된다. 또한 n이 클수록(보다 매끈할수록) 주어진 반사벡토르방향으로 방출되는 빛이 적어지게 된다.

거울반사면에서는 거울반사각에서만 빛을 볼수 있고 나머지방향에서는 빛이 전혀 전달되지 않는다. 즉 $\frac{\cos\phi}{n-(n-1)\cos\phi}=\frac{\cos\phi}{n(1-\cos\phi)+\cos\phi}$ 이다.

이 모형을 리용하여 다른 모형들과 속도와 질을 비교해보기로 한다.

우리의 모형을 리용하여 BRDF를 계산하는 알고리듬은 다음과 같다.

① 입사광선벡토르와 반사광선벡토르를 입력한다.

② 법선벡토르에 대한 거울반사벡토르를 계산한다.

③ 거울반사벡토르와 반사광선벡토르사이의 각의 코시누스값을 계산한다.

④ BRDF를 계산한다.

```
Spectrum f (const Vector3f &wo, const Vector3f &wi)
{
    Vector3f wR =wo;
    Vector3f wS = reflect(wR, n);
    Float cosalpha = AbsDot(wR, wS);
    Float fraction=cosalpha/(nPow - (nPow-1) * cosalpha);
    Spectrum L = kd + ks* fraction;
    return L;
}
```

표. 계산결과

	제안모형	Phong모형	변형된 Phong모형
시간/s	297.3	297.5	299.2
오차	1.493 7	3.500 9	1.768 0

제안모형과 Phong모형, 변형된 Phong모형을 가지고 killeroo-simple장면에 대한 렌더링을 진행한 계산결과는 표와 같다.

제안모형에 대한 실험은 Core(TM) i5-4 590 CPU @3.30GHz(4 CPUs)에서 진행하였으며 화상의 크기는 700×700 pixel이고 광원표본화와 BRDF표본화를 진행하였다. 또한 매 화소의 밝기를 계산하는데 8개의 표본을 리용하였으며 10번의 실험을 진행하여 시간과 오차의 평균값을 계산하였다.

같은 시간에서 진행한 실험결과를 보면 오차는 Phong모형에 비하여 42.67%, 변형된 Phong모형에 비하여 84.48%로 감소되였다.

참 고 문 헌

[1] E. Veach; Robust Monte Carlo Methods for Light Transport Simulation, Stanford University, 5～9, 1997.

[2] R. M. Soldado et al.; An Overview of BRDF Models, University of Granada, 67～101, 2012.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

A Rendering Method using a Better BRDF of Phong Model

Ri Jong Ro, Han Song

We propose one BRDF model for reducing of error in the scene containing glossy materials.

Key words: BRDF Model, glossy material

여러수준반복법과 가우스－에르미뜨구적법을 리용한 역방향확률미분방정식의 한가지 효률적인 수치도식

허 승 룡

론문에서는 확률미분방정식분야에서 중요한 위치를 차지하는 역방향확률미분방정식의 수치풀이에 대하여 연구하였다.

선행연구[1]에서는 여러수준반복법과 몽떼－까를로법을 결합하여 계산복잡도를 줄이는 한가지 수치방법을 제기하였다. 몽떼－까를로근사방법은 다중적분의 근사를 비롯하여 높은 차원의 적분을 근사시키는데서는 계산량을 줄이는데서 효과적이지만 낮은 차원인 경우에는 다른 근사방법들(실례로 가우스－에르미뜨구적법)에 비해 정확도가 현저히 떨어진다.

우리는 1차원역방향확률미분방정식에 대하여 수학적기대값근사에서 몽떼－까를로법 대신 가우스－에르미뜨구적법을 리용하여 계산복잡도를 보다 줄이는 한가지 효률적인 수치도식을 제기하였다.

1. 수 치 도 식

다음과 같은 역방향확률미분방정식을 생각하자.

$$y_t = g(W_T) + \int_t^T f(s,\ y_s,\ z_s)ds - \int_t^T z_s dW_s \tag{1}$$

여기서 $f:[0,\ T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 이고 W 는 1차원위너과정이다.

비선형헤이만－까스공식에 의하여 역방향확률미분방정식 (1)의 풀이 $(y_t,\ z_t)$ 는

$$y_t = u(t,\ W_t),\ z_t = u_x(t,\ W_t)$$

로 표시된다. 여기서 $u(t,\ x)$ 는 다음과 같은 편미분방정식의 풀이이다.

$$u_t(t,\ x) + \frac{1}{2}u_{xx}(t,\ x) + f(t,\ u,\ u_x) = 0 \tag{2}$$

이로부터

$$\begin{aligned} u(t,\ x) &= E[y_t \mid W_t = x] = \\ &= E[g(x + W_T - W_t)] + \int_t^T E[f(s,\ u(s,\ x + W_s - W_t),\ u_x(s,\ x + W_s - W_t))]ds \end{aligned} \tag{3}$$

Bismut−Elworlthy−Li의 공식[2]을 리용하면

$$\begin{aligned} u_x(t,\ x) &= E\left[g(x + W_T - W_t)\frac{W_T - W_t}{T - t}\right] + \\ &+ \int_t^T E\left[f(s,\ u(s,\ x + W_s - W_t),\ u_x(s,\ x + W_s - W_t))\frac{W_s - W_t}{s - t}\right]ds \end{aligned} \tag{4}$$

식 (3), (4)를 리용하여 $(u,\ u_x)$ 의 근사풀이를 반복법으로 구할수 있다.

$\phi:\mathrm{Lip}([0,\ T]\times\mathbf{R},\ \mathbf{R}^2)\to\mathrm{Lip}([0,\ T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2)$ (여기서 $\mathrm{Lip}(V_1,\ V_2)$ 는 $V_1\to V_2$ 인 립쉬츠련속함수들의 모임)를 다음과 같이 정의하자.

$$[\phi(v)](t,\ x):=E\left[g(x+W_T-W_t)\left(1,\ \frac{W_T-W_t}{T-t}\right)\right]+ \\ +\int_t^T E\left[(F(v)(s,\ x+W_s-W_t))\left(1,\ \frac{W_s-W_t}{s-t}\right)\right]ds,\ v\in\mathrm{Lip}([0,\ T]\times\mathbf{R},\ \mathbf{R}^2) \quad (5)$$

여기서 $F:\mathrm{Lip}([0,\ T]\times\mathbf{R},\ \mathbf{R}^2)\to\mathrm{Lip}([0,\ T]\times\mathbf{R},\ \mathbf{R}^2)$ 는 $[F(v)](t,\ x):=f(t,\ v(t,\ x))$ 로 정의되는 넘기기이다. 그러면 바나흐부동점정리에 의하여 방정식 (5)의 유일한 부동점 $v_\infty(\cdot,\ \cdot)$ 가 있어서 임의의 $t\in[0,\ T),\ x\in\mathbf{R}$ 에 대하여

$$\lim_{k\to\infty}v_k(t,\ x)=v_\infty(t,\ x)=[\phi(v_\infty)](t,\ x)=(u(t,\ x),\ u_x(t,\ x)) \quad (6)$$

가 성립하며 피카드반복렬을

$$v_k(t,\ x)=[\phi(v_{k-1})](t,\ x)$$

로 구성할수 있다.

이제 이 반복도식을 다음과 같이 변형한다.

$$v_k(t,\ x)=v_1(t,\ x)+\sum_{l=1}^{k-1}[v_{l+1}(t,\ x)-v_l(t,\ x)]= \\ =[\phi(v_0)](t,\ x)+\sum_{l=1}^{k-1}\left([\phi(v_l)](t,\ x)-[\phi(v_{l-1})](t,\ x)\right)= \\ =E\left[g(x+W_T-W_t)\left(1,\ \frac{W_T-W_t}{T-t}\right)\right]+ \\ +\sum_{l=0}^{k-1}\int_t^T E\left[(f(s,\ v_l(s,\ x+W_s-W_t))-I_{l\neq0}f(s,\ v_l(s,\ x+W_s-W_t)))\left(1,\ \frac{W_s-W_t}{s-t}\right)\right]ds \quad (7)$$

이제 도식 (7)에 대하여 시간적분항은 르쟝드르구적법으로 근사시키고 수학적기대값은 가우스—에르미뜨구적법에 의하여 근사시키면 역방향확률미분방정식 (1)에 대한 다음의 수치도식을 얻게 된다.

$$v_{n,M,Q}(t,\ x)=\hat{E}^{n,0,M}\left[g(x+W_T-W_t)\left(1,\ \frac{W_T-W_t}{T-t}\right)\right]+ \\ +\sum_{s\in[t,\ T]}q^{Q,[t,\ T]}(s)\sum_{l=1}^{k-1}\hat{E}^{n,l,M}\left[(f(s,\ v_l(s,\ x+W_s-W_t))-\right. \\ \left.-I_{\{l\neq0\}}f(s,\ v_l(s,\ x+W_s-W_t)))\left(1,\ \frac{W_s-W_t}{s-t}\right)\right]$$

여기서 $q^{Q,[t,\ T]}(\cdot)$ 는 르쟝드르구적법에서 무게결수들로서 $[-1,\ 1]$ 에서 Q 차르쟝드르다항식의 뿌리들을 $c_i^n,\ i=\overline{1,\ n}$ 라고 할 때 다음과 같이 표시된다.

$$q^{Q,[t,T]}(s):=\begin{cases}\int_t^T\left[\prod_{c_i^n\neq\frac{2s-(T+t)}{T-t},\, i=\overline{1,\ n}}\frac{2x-(T-t)c_i^n-(T+t)}{2s-(T-t)c_i^n-(T+t)}\right]dx, & \frac{2s-(T+t)}{T-t}\in\{c_1^n,\ \cdots,\ c_n^n\}\\ 0, & \frac{2s-(T+t)}{T-t}\notin\{c_1^n,\ \cdots,\ c_n^n\}\end{cases}$$

우의 수치도식에서 $v_{n,M,Q}(t,\ x)$는 시공간점 $(t,\ x)$에서 식 (1)의 풀이

$$(Y^{t,x},\ Z^{t,x})=(u(t,\ x),\ u_x(t,\ x))$$

에 대한 근사이다.

역방향확률미분방정식 (1)의 생성자 f가 조종변수 Z에 무관계하다고 할 때 $Y^{t,x}$만을 근사시키려면 다음과 같은 수치도식을 리용하면 된다. 복잡성을 피하기 위해 $Y^{\tau,x}$의 근사도 같은 기호 $v_{n,M,Q}(t,\ x)$로 표시하기로 한다.

$$\begin{aligned}v_{n,M,Q}(t,\ x)&=\hat{E}^{n,0,M}[g(x+W_T-W_t)]+\\&+\sum_{s\in[t,\ T]}q^{Q,[t,\ T]}(s)\sum_{l=1}^{k-1}\hat{E}^{n,l,M}[f(s,\ v_l(s,\ x+W_s-W_t))-I_{\{l\neq 0\}}f(s,\ v_l(s,\ x+W_s-W_t))]\end{aligned}\tag{8}$$

론문에서는 수치도식 (8)에 대하여 오차평가를 진행한다.

2. 오 차 평 가

수치도식 (8)의 수렴성을 판정하기 위해 다음과 같은 반노름을 도입한다.

$$\|V\|_{n,Q}:=\sum_{t\in[0,\ T]}\bar{q}^{n,Q}\left[\sup_{s\in[t,\ T]}\ \sup_{u\in[0,\ s]}\ \sup_{z\in\mathbf{R}}\sqrt{E[V^2(s,\ z+W_u)]}\right]\tag{9}$$

여기서 $V:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R},\ n,\ Q\in\mathbf{N}$이며 $\bar{q}^{n,Q}(t),\ 0\le t\le T$는 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{q}^{n,Q}(t):=\sum_{s\in[0,\ t]}\bar{q}^{n-1,Q}(s)q^{Q,[s,\ T]}(t),\ \ \bar{q}^{0,Q}(t):=I_{\{t=0\}}$$

이 반노름에 대하여 다음과 같은 사실들이 성립한다.[2]

$$\sum_{t\in[0,\ T]}\bar{q}^{n,\ Q}(t)\frac{(T-t)^k}{k!}=\frac{T^{n+k}}{(n+k)!}\tag{10}$$

$$\|F(v_1)-F(v_2)\|_{k,Q}\le L\|v_1-v_2\|_{k,Q}\tag{11}$$

여기서 $F:\mathrm{Lip}([0,\ T]\times\mathbf{R},\ \mathbf{R})\to\mathrm{Lip}([0,\ T]\times\mathbf{R},\ \mathbf{R})$는 립쉬츠상수 L을 가지는 립쉬츠함수이고 $v_1,\ v_2\in\mathrm{Lip}([0,\ T]\times\mathbf{R},\ \mathbf{R})$이다.

$$\left\|(s,\ z)\mapsto\sum_{t\in[s,\ T]}q^{Q,[s,\ T]}(t)\cdot v(t,\ z+W_t-W_s)\right\|_{k,Q}\le\|v\|_{k+1,Q}\tag{12}$$

$$|v_1|\le|v_2|\Rightarrow\|v_1\|_{k,Q}\le\|v_2\|_{k,Q}\tag{13}$$

$$\|v\|_{k,Q}\le \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}}|v(t,x)|\frac{T^k}{k!},\quad \|1\|_{k,Q}=\frac{T^k}{k!} \tag{14}$$

보조정리 1 $n, M\in\mathbf{N}$, $\alpha\in(0, 1/4)$에 대하여 n이 충분히 크면

$$\frac{(Mn)!}{(2Mn)!}T^{nM}\le\frac{e^{1/12}}{\sqrt{2}}(4e^{-1}M)^{-n},\quad \frac{(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3}\le\frac{1}{n^{2\alpha n}[(2n+1)!]^{1-\alpha}}$$

이 성립한다.

보조정리 2 역방향확률미분방정식 (1)에 대하여 f, g가 충분히 미끈하다고 가정하고 v_∞가 방정식 (2)를 만족시킨다고 하자. 그러면

$$\frac{1}{(1+2L^f)^{N-1}}\|v_{n,M,Q}-v_\infty\|_{k,Q}\le(4e^{-1}M)^{-N}e^{4e^{-1}MT}(L^f+L^g)+$$
$$+\frac{e^TT^{2Q+1}}{Q^{2\alpha Q}}\sup_{k\in\mathbf{N}}\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}}\left|\left[\left(\partial_t+\frac{1}{2}\partial_{xx}\right)^k(t,x)\right](t,x)\right|\cdot(k!)^{\alpha-1}+$$
$$+\sup_{k=1,\cdots,N}[(4e^{-1}M)^{-(N-k)}L^f\|v_\infty\|_{k,Q}]$$

가 성립한다. 여기서 L^f, L^g는 각각 f와 g의 립쉬츠결수들이다.

우의 보조정리에서 제시된 반노름 $\|\cdot\|_{0,Q}$에 관한 오차평가결과를 리용하여 절대값노름에 관한 오차를 평가할수 있다.

정리 역방향확률미분방정식 (1)에서 f, g가 충분히 미끈하다고 가정하면 다음의 결과가 성립한다.

$$(1+2L)^{-N}\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}}|v_{N,M,Q}(t,x)-v_\infty(t,x)|\le\frac{e^{4e^{-1}MT}}{(4e^{-1}M)^N}\left[1+\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}}|v_\infty(t,x)|\right]+$$
$$+\frac{e^TT^{2Q+1}}{Q^{2\alpha Q}}\sup_{k\in\mathbf{N}}\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}}(k!)^{\alpha-1}\left|\left[\left(\partial_t+\frac{1}{2}\partial_{xx}\right)^k v_\infty\right](t,x)\right|$$

증명

$$I:=(4e^{-1}M)^{-N}e^{4e^{-1}MT}(L^f+L^g)+\frac{e^TT^{2Q+1}}{Q^{2\alpha Q}}\sup_{k\in\mathbf{N}}\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}}\left|\left[\left(\partial_t+\frac{1}{2}\partial_{xx}\right)^k v_\infty\right](t,x)\right|\cdot(k!)^{\alpha-1}$$

로 놓자. 보조정리 2와 식 (11)－(14)를 리용하면

$$\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}}|v_{N,M,Q}(t,x)-v_\infty(t,x)|\le$$
$$\le\sup_{t\in[0,T]}\sup_{x\in\mathbf{R}}\sup_{z\in[0,t]}\sqrt{E(v_{N,M,Q}(t,x+W_z)-v_\infty(t,x+W_z))^2}=$$
$$=\|v_{N,M,Q}(t,x)-v_\infty(t,x)\|_{0,Q}\le$$
$$\le(1+2L^f)^{N-1}\left(I+\sup_{k=1,\cdots,N}\left[(4e^{-1}M)^{-(N-k)}L^f\cdot\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}}|v_\infty(t,x)|\frac{T^k}{k!}\right]\right)\le$$
$$\le(1+2L^f)^{N-1}\left(I+e^{4e^{-1}T}(4e^{-1}M)^{-N}L^f\cdot\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}}|v_\infty(t,x)|\right)=$$

$$= (1+2L^f)^{N-1}\frac{e^{4e^{-1}MT}}{(4e^{-1}M)^N}\left[(L^f + L^g) + L^f\cdot \sup_{(t,\ x)\in[0,\ T]\times\mathbf{R}} |v_\infty(t,\ x)|\right]+$$
$$+(1+2L^f)^{N-1}\frac{e^T T^{2Q+1}}{Q^{2\alpha Q}}\sup_{k\in N}\sup_{(t,\ x)\in[0,\ T]\times\mathbf{R}}(k!)^{\alpha-1}\left|\left[\left(\partial_t+\frac{1}{2}\partial_{xx}\right)^k v_\infty\right](t,\ x)\right| \le$$
$$\le (1+2L)^N\frac{e^{4e^{-1}MT}}{(4e^{-1}M)^N}\left[1+\sup_{(t,\ x)\in[0,\ T]\times\mathbf{R}}|v_\infty(t,\ x)|\right]+$$
$$+(1+2L)^N\frac{e^T T^{2Q+1}}{Q^{2\alpha Q}}\sup_{k\in\mathbf{N}}\sup_{(t,\ x)\in[0,\ T]\times\mathbf{R}}(k!)^{\alpha-1}\left|\left[\left(\partial_t+\frac{1}{2}\partial_{xx}\right)^k v_\infty\right](t,\ x)\right|$$

여기서

$$L := \max\{L^f,\ L^g\}$$

이다.(증명끝)

수치도식 (8)에서 기대값근사 $\hat{E}^{k,l,M}$ 을 계산할 때 매 수준 l $(0\le l\le k-1)$ 에 대하여 수학적기대값근사에 리용되는 가우스－에르미뜨구적법의 표본점수는 $M(k-l)$ 개인데 이때 오차는 정리로부터 매 수준에서 몽떼－까를로표본수를 M^{k-l} 개로 주고 론의한 선행연구 [2]에서의 오차결과와 같다.

따라서 우리는 매우 낮은 개수의 표본점으로 선행도식에서와 꼭같은 정확도를 보장함으로써 계산복잡도를 훨씬 줄이였다.

참 고 문 헌

[1] M. Hutzenthaler et al.; arXiv:1607.03295, [math.PR], 2017.
[2] M. Fuhrman et al.; Stochastics, 74, 2, 429, 2002.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

An Effective Numerical Scheme for BSDE using Muti−level Iteration and Gauss−Hermite Quadrature Rule

Ho Sung Ryong

In this paper, we propose an effective numerical scheme for BSDE based on multi−level iteration and Gauss−Hermite quadrature rule and estimate its error.

Key word: backward stochastic differential equation

김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

임풀스조건을 가지는 한가지 비선형다항분수계미분방정식의 하이어스-울람안정성

리선혁, 리영도

분수계미분방정식은 여러 분야의 많은 현상들을 모형화할수 있는 위력한 수단인것으로 하여 그에 대한 연구는 더욱 심화되고있다.[2]

분수계미분방정식에 대한 연구에서 최근 많이 진행되고있는 분야의 하나가 바로 하이어스-울람안정성이다.

선행연구[4]에서 처음으로 제시된 안정성문제는 울람안정성이라고 정식화되였으며 그에 대한 첫 부분적인 해답은 선행연구[3]에서의 바나흐공간에서 진행되였고 선행연구[5]에서는 하이어스의 정리의 일반화된 결과를 얻어냈다. 미분방정식의 울람안정성은 그것이 풀이의 존재성과 근사풀이의 리론적기초를 주는것으로 하여 중요한 내용을 이루며 선행연구[6]에서 처음으로 시작되게 되였다.

최근 옹근수계뿐아니라 분수계미분방정식의 울람안정성에 대하여서도 많은 결과들이 나오고있다.

선행연구[7]에서는 분수계미분방정식

$$^{c}D^{\alpha}x(t)=f(t,\ x(t)),\ t\in[a,\ b]$$

에 대하여 하이어스-울람안정성과 하이어스-울람-라씨아스안정성을 론의하였으며 선행연구[8]에서는 두가지 형태의 상결수선형분수계미분방정식에 대하여 하이어스-울람안정성과 하이어스-울람-라씨아스안정성의 충분조건을 얻어냈다. 이밖에도 분수계미분 및 적분방정식의 하이어스-울람안정성과 관련한 론문들을 선행연구[1, 9, 10]에서 찾아볼수 있다.

또한 일부 론문들에서는 임풀스조건을 가지는 분수계미분방정식의 풀이의 존재성과 유일성, 하이어스-울람안정성에 대하여 론의하였다.

선행연구[11, 12]에서는 일반화된 그론월부등식을 리용하여 초기조건 및 적분경계조건을 가지는 임풀스단항분수계미분방정식의 풀이의 존재성을 론의하고 분수계미분방정식의 하이어스-울람-라씨아스안정성을 고찰하였다.

대부분의 결과들이 단항인 경우로 제한되고있는것으로 하여 론문에서는 임풀스조건을 가지는 다음의 다항분수계미분방정식에 대하여 연구하였다.

$$\begin{cases} ^{c}D_{0+}^{\alpha}u(t)=f(t,\ u(t),\ ^{c}D_{0+}^{\beta}u(t)),\ t\in J'=J\setminus\{t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_m\},\ J=[0,\ T] \\ \Delta u(t_j):=u(t_j^{+})-u(t_j^{-})=I_j(u(t_j^{-})),\ j=1,\ 2,\cdots,\ m \\ u(0)=u_0 \end{cases} \tag{1}$$

여기서 $0<\beta<\alpha<1$이고 f와 I_j는 $f:J\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, $I_j:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$인 련속함수들이며 $u_0\in\mathbf{R}$, $0=t_0<t_1<\cdots<t_m<t_{m+1}=T$, $u(t_j^{+})=\lim\limits_{h\to 0+0}u(t_j+h)$, $u(t_j^{-})=\lim\limits_{h\to 0-0}u(t_j+h)$이다.

정의 1 [2] 함수 $f\in L_1[a,\ b]$의 아래한계가 a인 $\alpha>0$계분수적분은

$$I_{a+}^{\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \ a \le t \le b$$

로 정의된다. 여기서 $\Gamma(\cdot)$는 감마함수이다.

정의 2[2] 함수 f의 $\alpha>0$계분수도함수는

$${}^{C}D_{a+}^{\alpha} f(t) := I_{a+}^{n-\alpha}[D^n f(t)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau$$

로 정의된다. 여기서 $f^{(n)} \in L_1[a, b]$, $n = [\alpha]+1$이다.

보조정리 1[2] 함수 $f(x) = (x-a)^p$에 대하여 $p > -1, \ \alpha > 0$이라고 하면

$$I_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)} (t-a)^{\alpha+p}$$

가 성립한다.

보조정리 2[2] 만일 $\alpha \in \mathbf{R}_+$, $n-1 < \alpha \le n$, $n \in \mathbf{N}$, $f \in AC^n[a, b]$이면

$$I_{a+}^{\alpha}\, {}^{c}D_{a+}^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (t-a)^j$$

가 성립한다.

정의 3 ${}^{c}D_{0+}^{\alpha} u \in PC(J, \mathbf{R})$ 인 함수 $u(t)$가 방정식 (1)을 만족시키면 그 함수를 방정식 (1)의 풀이라고 부른다.

다음의 부등식을 생각하자.

$$\begin{cases} \| {}^{c}D_{0+}^{\alpha} u(t) - f(t, \ u(t), \ {}^{c}D_{0+}^{\beta} u(t)) \|_{PC} \le \varepsilon, \ t \in J' \\ | \Delta u(t_j) - I_j(u(t_j^-)) | \le \varepsilon \ \ (j = 1, \ 2, \ \cdots, \ m) \end{cases} \quad (2)$$

여기서 $\|\cdot\|_{PC}$는 PC－노름으로서 $\|u\|_{PC} = \sup_{t \in J} |u(t)|$이다.

정의 4 만일 ${}^{c}D_{0+}^{\alpha} v \in PC(J, \mathbf{R})$인 함수 $v(t)$가 부등식 (2)를 만족시키면 함수 $v(t)$를 부등식 (2)의 풀이라고 부른다.

정의 5 만일 적당한 상수 $K > 0$이 있어서 임의의 $\varepsilon > 0$과 부등식의 풀이 $u \in PC(J, \mathbf{R})$에 대하여 부등식 $\|u - u_0\|_{PC} < K\varepsilon$을 만족시키는 방정식 (1)의 풀이 $u_0 \in PC(J, \mathbf{R})$가 존재하면 방정식 (1)은 하이어스－울람안정하다고 말한다.

보조정리 3 $I^{\alpha} e^{kt} \le \dfrac{e^{kt}}{k^{\alpha}}$이 성립한다.

주의 함수 $v \in PC(J, \mathbf{R})$가 부등식 (2)의 풀이이기 위하여서는 적당한 함수 $g \in PC(J, \mathbf{R})$와 렬 $g_j \in \mathbf{R}$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$가 있어서 다음의 조건들을 만족시킬것이 필요하고 충분하다.

$$\begin{aligned} & \|g\|_{PC} \le \varepsilon, \ |g_j| \le \varepsilon \ \ (j = 1, \ 2, \ \cdots, \ m) \\ & {}^{c}D^{\alpha} v(t) = f(t, \ v(t), \ {}^{c}D^{\beta} v(t)) + g(t), \ t \in J' \\ & \Delta v(t_j) = I_j(v(t_j^-)) + g_j \ \ (j = 1, \ 2, \ \cdots, \ m) \end{aligned} \quad (3)$$

보조정리 4 $u(t)$가 방정식 (1)의 풀이이면 ${}^{c}D^{\alpha} u(t) = y(t)$인 $y(t)$는 다음의 적분방정식의 풀이이다.

$$y(t)=\begin{cases} f(t,\ u_0+I^\alpha y(t),\ I^{\alpha-\beta}y(t)),\ t\in[0,\ t_1) \\ f(t,\ u_0+I^\alpha y(t)+I_1(u(t_1^-)),\ I^{\alpha-\beta}y(t)),\ t\in(t_1,\ t_2) \\ f(t,\ u_0+I^\alpha y(t)+I_1(u(t_1^-))+I_2(u(t_2^-)),\ I^{\alpha-\beta}y(t)),\ t\in(t_2,\ t_3) \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ f(t,\ u_0+I^\alpha y(t)+\sum_{i=1}^{m}I_i(u(t_i^-)),\ I^{\alpha-\beta}y(t)),\ t\in(t_m,\ T) \end{cases} \tag{4}$$

여기서

$$u(t_i^-)=u_0+\sum_{j=1}^{i-1}I_j(u(t_j^-))+I^\alpha y(t)|_{t=t_i},\ u(t_1^-)=u_0+I^\alpha y(t)|_{t=t_1}$$

이다.

거꾸로 적분방정식 (4)를 만족시키는 $y(t)$에 대하여

$$u(t)=u_0+\sum_{i=1}^{j}I_i(u(t_i^-))+I^\alpha y(t),\ t\in(t_j,\ t_{j+1})\ (j=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$$

은 방정식 (1)의 풀이이다. 여기서 $t_0=0,\ t_{m+1}=T$이다.

다음의 보조정리에서는 적분방정식 (4)의 풀이의 존재성을 보여준다.

보조정리 5 가정 ① $\forall x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2\in\mathbf{R},\ \exists l_1,\ l_2>0;$

$$|f(t,\ x_1,\ y_1)-f(t,\ x_2,\ y_2)|\le l_1|x_1-x_2|+l_2|x_2-y_2|$$

가정 ② $\forall x_1,\ x_2\in\mathbf{R},\ \exists\mu_i>0;\ |I_i(x_1)-I_i(x_2)|\le\mu_i|x_1-x_2|\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$

가정 ①, ②를 만족시키면 적분방정식 (4)는 유일한 풀이를 가진다.

보조정리 6 $v(t)$가 방정식 (3)의 풀이이면 ${}^cD^\alpha v(t)=x(t)$인 $x(t)$는 적분방정식

$$x(t)=\begin{cases} f(t,\ u_0+I^\alpha x(t),\ I^{\alpha-\beta}x(t))+g(t),\ t\in[0,\ t_1) \\ f(t,\ u_0+I^\alpha x(t)+I_1(v(t_1^-))+g_1,\ I^{\alpha-\beta}y(t))+g(t),\ t\in(t_1,\ t_2) \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ f(t,\ u_0+I^\alpha x(t)+\sum_{i=1}^{m}I_i(v(t_i^-))+\sum_{i=1}^{m}g_i,\ I^{\alpha-\beta}x(t))+g(t),\ t\in(t_m,\ T] \end{cases} \tag{5}$$

의 풀이이다.

거꾸로 적분방정식 (5)를 만족시키는 $x(t)$에 대하여

$$v(t)=u_0+\sum_{i=1}^{j}I_i(v(t_i^-))+\sum_{i=1}^{j}g_i+I^\alpha x(t),\ t\in(t_j,\ t_{j+1}) \tag{6}$$

에 의하여 얻어지는 $v(t)$는 방정식 (3)의 풀이이다.

방정식 (1)에 대한 하이어스—울람안정성에 대하여 보자.

정리 가정 ①과 ②를 만족시키면 방정식 (1)은 하이어스—울람안정하다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학, 65, 1, 68, 주체108(2019).

[2] A. A. Kilbas et al.; Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, 183～232, 2006.

[3] S. M. Ulam; A Collection of Mathematical Problems, Interscience Publishers, 127～154, 1968.

[4] D. H. Hyers; Proc. Natl. Acad. Sci., 27, 222, 1941.

[5] Th. M. Rassias; Proc. Amer. Math. Soc., 72, 297, 1978.

[6] M. Obloza; Rocznik Nauk. Dydakt. Prace Mat., 13, 259, 1993.

[7] J. Wang et al.; Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 17, 2530, 2012.

[8] J. Wang et al.; Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 63, 1, 2011.

[9] O. Masakazu et al.; Appl. Math. Lett., 63, 102, 2017.

[10] G. Zhuo et al.; J. Appl. Math. Comput., 53, 599, 2017.

[11] J. Wang et al.; Comput. Math. Appl., 64, 3389, 2012.

[12] A. I. Mohamed; J. Contemp. Math. Anal., 50, 209, 2015.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

Hyers-Ulam Stability of a Nonlinear Multi-Term Fractional Differential Eqaution with Impulsive Condition

Ri Son Hyok, *Ri Yong Do*

In this paper, we study Hyers-Ulam stability of a nonlinear multi-term fractional differential equation with impulsive condition.

Key words: Hyers-Ulam stability, fractional differential equation

김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

무게결합에 의한 방향성마당내보간 순차화방법의 개선

리철균, 전일광

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《인민경제 모든 부문의 생산기술공정과 생산방법, 경영활동을 새로운 과학적토대우에 올려세우기 위한 연구사업도 강화하여야 합니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138페지)

우리는 TV방송의 현대화에서 중요한 문제로 제기되는 간차식동영상의 순차화를 위한 마당내보간방법에 대하여 연구한다.

TV방송에서는 전송비용문제로 하여 전통적으로 간차식동영상 즉 한번에 한줄건너 하나씩의 절반화면만이 갱신되는 동영상을 쓴다. 다시말하여 어떤 순간에 짝수번째 주사선 혹은 홀수번째 주사선들만 갱신되게 된다.

이런 간차식동영상은 콤퓨터현시장치와 같은 순차식화면방식을 가진 영상표시장치로 현시되거나 린접점의 정보를 중요하게 리용하는 화상처리의 여러 과제들에서 리용될 때에는 빗살효과라고 불리우는 부정적인 현상들이 나타나게 된다.

이로부터 이런 경우들에는 간차식동영상을 순차식동영상으로 만드는 순차화과정이 필수적으로 제기된다.

순차화는 1개 마당만을 리용하는가 아니면 둘이상의 마당을 리용하는가에 따라 마당내보간방법과 마당간보간방법으로 나눌수 있다. 여기서 마당이라고 하는것은 한번에 갱신되는 절반화면 즉 짝수번째 혹은 홀수번째 주사선들로 이루어진 화면이다.

마당간보간방법은 움직임을 추정하고 그것에 따라 보간을 진행하는 성능이 높은 방법이지만 움직임추정이 불안정한 화상령역에서는 순차화의 결과가 잘못되는것으로 하여 마당내보간방법을 결합하여 리용하고있으며 대부분의 마당간보간방법들에서는 마당내보간방법을 리용하여 마당을 먼저 순차화하고 그 순차화된 프레임들을 리용하여 움직임을 추정하고있다.

이러한 리유로 하여 마당내보간의 성능을 개선하는것은 전체 순차화의 질을 높이는데서 중요한 몫을 담당한다.

선행연구에서 제기된 마당내보간방법에는 크게 선반복법(LR), 선평균법(LA), 경계기반선평균법(ELA), 방향성마당내보간법(DOI)과 그것들의 변종들이 있다.

LR[1]와 LA[4]는 속도가 빠르고 안정한 방법이지만 순차화의 결과에서 계단효과를 나타내는 부족점이 있으며 ELA[3]는 화소값류사도에 의하여 경계방향을 미리 추정하고 그것에 따르는 보간을 진행하므로 계단효과가 극복되고 순차화의 성능이 제고된다. 그러나 경계방향추정이 잡음에 민감하며 추정범위를 늘이는 경우 추정의 정확성이 떨어지는 결함이 있다.

개선된 경계기반선평균법(E-ELA)과 변형된 경계기반선평균법(M-ELA)은 보간하려는 점근방의 경계정보를 일정하게 리용한것으로 하여 경계방향추정이 ELA보다 약간 안정하지만 역시 추정범위를 늘이는 경우 추정의 정확성이 떨어지는 결함이 있다.

DOI[2]는 ELA와는 달리 블로크류사도에 의하여 경계방향을 추정하기때문에 경계방향추정이 보다 안정하고 정확하다. DOI는 많은 순차화체계들에 리용되고있으며 성능이 가장 높은 마당내보간방법이다.

하지만 DOI는 반복무늬가 있는 구역이나 얇은 선경계, 수평경계 등에서 순차화의 결과가 잘못되는 부족점을 가지고있다.

이러한 부족점의 원인은 경계방향추정이 단순히 블로크사이의 화소값류사도에만 의존하고있기때문이다.

표상적으로 화소값류사도가 거의 같은 경우 경계방향은 중심에서 가까운것으로 택하여야 한다. 즉 중심으로부터 멀어지면 멀어질수록 선택될 가능성이 작아지게 하여야 한다.

이에 기초하여 화소값류사도에 중심으로부터의 거리에 따르는 무게를 결합하면 DOI를 개선할수 있다는것을 알수 있다. 이로부터 우리는 중심블로크로부터 멀리 떨어지면 질수록 화소값차에 보다 큰 무게를 곱해주어 경계방향추정의 안정성을 높이려고 한다.

웃방향에서의 블로크류사도는 다음과 같이 구한다.

$$S_U(k)=$$
$$=\left(\sum_{j=-1}^{1}(|U_0(j+i)-U_1(j+i+k)|^2+|L_0(j+i)-U_0(j+i+k)|^2)\right)\times W(k)$$

또한 아래방향에서의 블로크류사도는 다음과 같이 구한다.

$$S_L(k)=$$
$$=\left(\sum_{j=-1}^{1}(|U_0(j+i)-L_0(j+i+k)|^2+|L_0(j+i)-L_1(j+i+k)|^2)\right)\times W(k)$$

여기서 U_0 은 보간하려는 점의 웃줄, U_1 은 보간하려는 점의 우로 세번째 줄, L_0 은 보간하려는 점의 아래줄, L_1 은 보간하려는 점의 아래로 세번째 줄이다. 또한 $W(k)$ 는 중심으로부터의 거리에 따르는 무게함수이다.

무게함수는 $W(k)=(1+k^2)^{1/2}$ 혹은 $W(k)=(1+k^2)^{1/4}$ 등 여러가지로 줄수 있다.

론문에서는 $W(k)=(1+k^2)^{1/4}$ 으로 준다.

이제 보간하려는 점에서의 웃방향으로의 SDV는

$$\mathrm{SDV}_U=\arg\min\{S_U(k)\},\ -R\le k\le R$$

와 같으며 아래방향으로의 SDV는 다음과 같다.

$$\mathrm{SDV}_L=\arg\min\{S_L(k)\},\ -R\le k\le R$$

이때 웃방향과 아래방향이 같으면 즉 $\mathrm{SDV}_U+\mathrm{SDV}_L=0$ 이면 보간하려는 점을

$$X(i)=\frac{U_0(i+i_U)+L_0(i+i_L)}{2}$$

로 보간한다. 여기서 $i_U = \frac{\mathrm{SDV}_U}{2}$, $i_L = \frac{\mathrm{SDV}_L}{2}$ 이다.

두 방향이 같지 않으면 즉 $\mathrm{SDV}_U + \mathrm{SDV}_L \neq 0$ 이면 보간하려는 점을

$$X(i) = \frac{U_0(i) + L_0(i)}{2}$$

로 보간한다.

론문에서 제기한 방법의 효과성을 검증하기 위하여 5개의 실험화상들에 대하여 론문에서 제기한 방법과 선행연구들에서 제기한 4가지 방법의 결과를 비교하였다.

5개의 실험화상에 대하여 계산공식

$$\mathrm{MSE} = \frac{1}{XY}\sum_{i=1}^{X}\sum_{j=1}^{Y}(I_{i,\ j} - O_{i,\ j})^2$$

에 따라 원화상과 보간된 결과사이의 평균두제곱오차를 계산한다. 여기서 $I_{i,\ j}$ 는 원화상의 $(i,\ j)$ 화소의 밝기값, $O_{i,\ j}$ 는 보간된 화상의 $(i,\ j)$ 화소의 밝기값, X, Y 는 각각 화상의 높이값, 너비값이다.

신호 대 잡음비를 다음의 공식에 따라 계산한다.

$$\mathrm{PSNR} = 10\ \log_{10}\frac{255 \times 255}{\mathrm{MSE}}$$

5가지 방법의 성능을 계산한 결과는 표와 같다.

표. 성능계산결과

대상	LR	LA	ELA	DOI	론문에서 제기한 방법
미래과학자거리	25.369 6	26.429 6	27.709 0	28.880 7	29.494 7
과학기술전당	21.892 4	22.700 4	24.687 7	25.342 0	25.577 0
대동문	21.996 3	22.470 1	23.224 5	24.426 0	25.216 3
5월1일경기장	24.060 3	24.704 0	27.254 9	28.078 4	28.606 0
려명거리	19.206 3	20.601 8	20.533 9	21.376 5	21.893 5
평균	21.673 0	22.580 8	23.957 9	24.763 3	25.232 0

표에서 보는바와 같이 여러가지 특성을 가진 화상들에 대하여 순차화를 진행할 때 론문에서 제기한 방법의 보간오차가 가장 작다.

참 고 문 헌

[1] E. B. Bellers et al.; Syst. Sig. Proc. Mierlo, 27, 7, 28, 1996.
[2] Y. Bi et al.; Communic. Comput. Informat. Science, 12, 685, 2016.
[3] T. Chen et al.; Visual Communications and Image Processing, 40, 6, 1551, 2000.
[4] H. R. Myler et al.; Cybernetics and Informatics, 13, 335, 1998.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

Improvement of DOI Intra-Field Deinterlacing Method by Combination of Weight

Ri Chol Gyun, Jon Il Gwang

We propose an improvement of DOI intra-field deinterlacing method by combination of weight. The experiment shows that this method is usuful.

Key words: Bayes estimation, intra-field interpolation, deinterlacing

김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

블로크대조 및 3차원직교변환을 리용한 화상류역분할방법의 개선

홍영일, 박찬종

론문에서는 화상분할의 중요한 방법의 하나로 되고있는 화상류역분할방법에 대하여 연구하였다.

선행연구[1]에서는 시초의 류역분할방법에 대하여 론의하였는데 이 방법은 분할이 지나치게 많아지는 부족점을 가지고있다. 이를 해결하기 위하여 선행연구[4]에서는 표식자를 리용하는 분할방법을 리용하였다. 그러나 이 방법은 잡음의 영향에 예민하여 지나친 분할을 막기에는 불충분하였다.

선행연구[3]에서는 가우스평활화와 비등방성확산을 리용하여 잡음을 제거한 다음 그에 대하여 류역분할방법을 적용하여 분할성능을 현저히 개선하였다. 그러나 가우스평활화나 비등방성확산만 가지고는 잡음제거를 원만히 진행할수 없으며 원화상의 정보를 어느정도 잃어버리는것으로 하여 완벽한 방법으로는 되지 못하였다.

선행연구[2]에서는 현재 잡음제거분야에서 널리 리용되고있는 블로크대조 및 3차원직교변환방법에 대하여 제기하였다. 이 방법을 리용하면 잡음을 제거하면서도 원화상의 정보를 대부분 보존할수 있다.

우리는 블로크대조 및 3차원직교변환방법을 리용하여 잡음을 제거하고 그것에 류역분할알고리듬을 리용함으로써 분할성능을 개선한다.

먼저 블로크대조 및 3차원직교변환방법에 대하여 보기로 하자.

$Z(x)=y(x)+\eta(x)$ 형식의 잡음있는 관측 $Z: X\to \mathbf{R}$ 를 론의한다. 여기서 $x\in X$ 는 화상령역 $X\subset \mathbf{Z}^2$ 에 속하는 2차원공간자리표이고 y 는 정확한 화상이며 $\eta(x)\sim N(0,\ \sigma^2)$ 은 분산이 σ^2 인 백색가우스잡음이다. Z 로부터 $Z(x)$ 가 왼쪽 웃원소인 고정된 크기 $N_1\times N_1$ 블로크를 Z_x 로 표시한다. 정확한 화상의 최종추정값을 $\hat{y}$ 로 표시한다. 론의되는 블로크를 Z_{x_R} 라고 하자. 여기서 $x_R\in X$ 이다.

블로크대조를 리용하여 Z_{x_R} 와 상관이 높은 블로크들을 찾는다.

블로크들사이의 거리를 다음과 같이 정의한다.

$$d(Z_{x_1},\ Z_{x_2})=N_1^{-1}\|\gamma(\Im_{2D}(Z_{x_1}),\ \lambda_{thr2D}\sigma\sqrt{2\log(N_1^2)})-\gamma(\Im_{2D}(Z_{x_2}),\ \lambda_{thr2D}\sigma\sqrt{2\log(N_1^2)})\|_2$$

여기서 $x_1,\ x_2\in X$, $\Im_{2D}$ 는 2차원선형우니따르변환연산자(실례로 DCT, DFT), γ 는 하드턱값화연산자, λ_{thr2D} 는 고정된 턱값파라메터이다. 보통 γ 는

$$\gamma(\lambda,\ \lambda_{thr})=\begin{cases}\lambda,\ |\lambda|>\lambda_{thr}\\ 0,\ 기타\end{cases}$$

로 정의한다. 블로크대조결과는 거리 d 에 관하여 Z_{x_R} 와 류사한 블로크들의 자리표들의 모임 $S_{x_R}\subseteq X$ 이다. 따라서 S_{x_R} 는 $S_{x_R}=\{x\in X\mid d(Z_{x_R},\ Z_x)<\tau_{match}\}$ 로 정의한다. 여기서 τ_{match} 는

류사한 두 블로크들사이의 거리 d의 최대값이다. 류사블로크$(Z_{S_{x_R}})$들을 거리 d가 커지는 순서로 겹쌓아놓아 $N_1 \times N_1 \times |S_{x_R}|$크기의 3차원배렬을 얻는다.

정확한 신호의 성긴표현을 얻기 위하여 $Z_{S_{x_R}}$에 3차원우니따르변환 $\Im_{3D}$를 적용한다.

다음 거꿀변환연산자 $\Im_{3D}{}^{-1}$에 의하여 재구성된 추정값들의 3차원배렬

$$\hat{Y}_{S_{x_R}} = \Im_{3D}^{-1}(\lambda(\Im_{3D}(Z_{S_{x_R}}),\ \lambda_{thr3D}\sigma\sqrt{2\log(N_1^2)}))$$

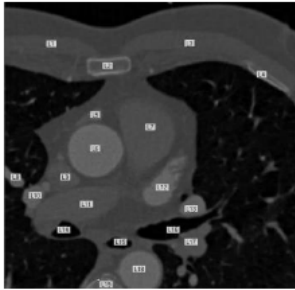
을 얻는다. 여기서 λ_{thr3D}는 고정된 턱값파라메터이다.

$\hat{Y}_{x_m}^{x_R}(x)$를 $y(x)$의 추정값이라고 하자. 구성을 간단히 하기 위하여 $\hat{Y}_{x_m}^{x_R}(x)$를 그것의 정방형받침밖으로 령연장한다. 최종적으로 $\hat{y}$은 다음과 같이 무게평균으로 계산한다.

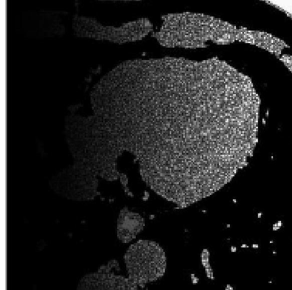
$$\hat{y}(x) = \frac{\sum_{x_R \in X} \sum_{x_m \in S_{x_R}} w_{x_R} \hat{Y}_{x_m}^{x_R}(x)}{\sum_{x_R \in X} \sum_{x_m \in S_{x_R}} w_{x_R} \chi_{x_m}^{x_R}(x)},\quad \forall x \in X$$

여기서 $\chi_{\chi_m} : X \to \{0,\ 1\}$은 특성함수, 무게는 $w_{x_R} = \begin{cases} \dfrac{1}{N_{har}}, & N_{har} \ge 1 \\ 1, & \text{기타} \end{cases}$, N_{har}는 하드턱값화를 진행한 후 령이 아닌 변환결수들의 개수이다.

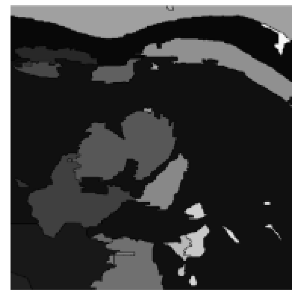
우에서 론의한 블로크대조 및 3차원직교변환방법을 적용하여 주어진 화상의 전처리를 진행한다.



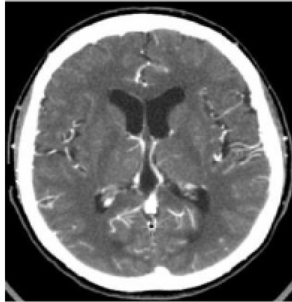
2D CT심장화상



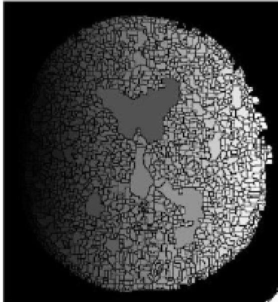
류역분할방법([1])



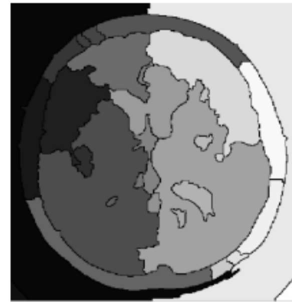
론문에서 제기한 방법



2D CT 뇌수화상



류역분할방법([1])



론문에서 제기한 방법

그림. 실험결과

다음으로 전처리를 진행한 그라디엔트화상에 류역분할방법([1])을 적용한다.

심장과 뇌수를 촬영한 2차원CT화상을 선행연구에서 제기한 방법과 론문에서 제기한 방법으로 분할을 진행한 실험결과를 그림에 보여주었다.

참 고 문 헌

[1] 홍기범 등; 수자화상처리기술 2, 공업출판사, 151～156, 주체106(2017).
[2] Kostadin Dabov et al.; Proc. SPIE, 6064, 14, 12, 2006.
[3] Mithun Kumar et al.; Int. J. of Image, Graphics and Signal Processing, 4, 12, 26, 2014.
[4] M. Naemura et al.; IEEE Transactions on Broadcasting, 46, 3, 181, 2000.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

An Improved Watershed Segmentation Algorithm using BM3D

Hong Yong Il, Pak Chan Jong

We propose an improved watershed segmentation algorithm using BM3D.
The experiment shows that this method is useful.

Key words: watershed segmentation algorithm, BM3D

김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

다단열풍건조로의 입구에서 공기흐름의 균일분포를 보장하기 위한 한가지 방법

김의성, 김광혁

위대한 수령 **김일성**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《과학자, 기술자들은 주체적인 립장에 튼튼히 서서 과학연구사업을 하여야 합니다. 그리하여 우리 나라의 공업을 주체화하는데서 절실하게 나서는 과학기술적문제들을 풀어야 합니다.》(《**김일성**전집》 제77권 262페지)

우리는 벨트식열풍건조기의 성능을 높이는데서 중요한 문제의 하나인 가열공기의 균일한 흐름을 보장하기 위한 한가지 방법을 연구하였다.

공기흐름을 균일하게 보장하는것은 류체흐름을 리용하는 장치들의 성능을 높이기 위한 중요한 문제의 하나로 제기된다. 균일한 공기흐름을 보장하기 위한 여러가지 방법[2, 3]들이 제기되였지만 현실에서 제기되는 대상이 각이하므로 일반적인 방법을 찾기는 힘들다.

론문에서는 주어진 한가지 대상에 대하여 저항격판들의 길이를 조절하여 제작하기 쉬우면서도 균일공기흐름을 보장하기 위한 한가지 방법을 제기하였다.

1. 문제설정

벨트식다단열풍건조로의 원리도를 그림 1에서 보여주었다. 수직으로 공급하는 가열공기가 아래부분에서 균일하게 공급되여야 건조물질들을 고르롭게 통과하면서 건조성능을 높이고 제품의 질을 높일수 있다.

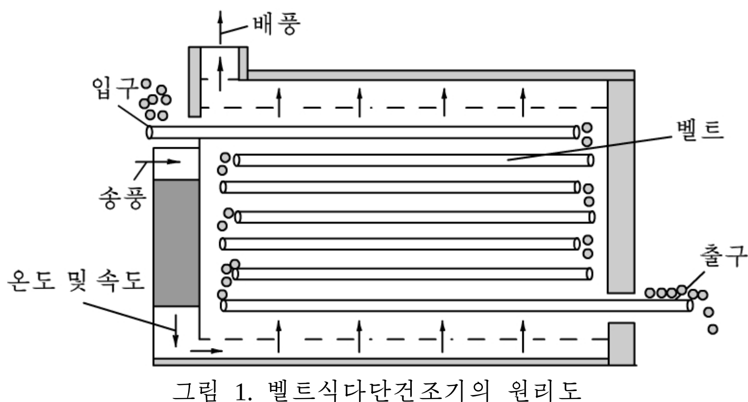


그림 1. 벨트식다단건조기의 원리도

공기가 입구로 들어와 가열되고 아래부분에 설치한 판사이에 난 구멍으로 빠져나간다. 이때 가열공기흐름을 균일하게 보장하기 위하여 공기구멍들의 뒤쪽에 설치하는 저항현시판의 길이를 조절하는 방법을 적용하였다.

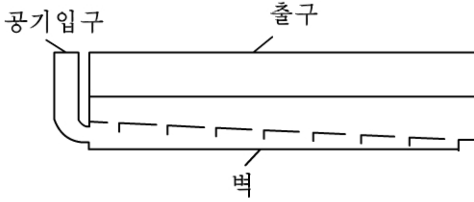


그림 2. 흐름구역과 저항판의 배치

수치모의를 진행하기 위하여 입구부분과 분배구역에서 흐름구역을 아래와 같이 2차원으로 취급하였다.(그림 2)

1) 기본방정식

공기흐름의 속도가 작고 맥동이 심한 조건을 고려하여 표준 $k-\varepsilon$ 모형을 리용한 비압축성류체의 정상흐름에 대한 기본방정식을 적용할수 있다.[1]

$$\frac{\partial u_i}{\partial q_i}=0 \tag{1}$$

$$\rho(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=-\nabla p+\nabla\cdot(\mu+\mu_t)\nabla\vec{v} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial ku_i}{\partial q_i}&=\frac{\partial}{\partial q_j}\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial q_j}\right]+G_k+G_b-\rho\varepsilon-Y_M+S_k\\ \rho\frac{\partial}{\partial q_i}(\rho\varepsilon u_i)&=\frac{\partial}{\partial q_j}\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial\varepsilon}{\partial q_j}\right]+C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}(G_k+C_{3\varepsilon}G_b)-C_{2\varepsilon}\rho\frac{\varepsilon^2}{k}+S_\varepsilon\end{aligned} \tag{3}$$

여기서 G_k 는 평균속도구배로 인한 란류운동에네르기산일이고 G_b 는 부력에 의한 란류운동에네르기산일, Y_M 은 에네르기손실속도에 주는 압축성란류의 맥동팽창의 기여몫, C_{1s}, C_{2s}, C_{3s} 는 모형상수이고 σ_k, σ_s 는 각각 란류프란틀수, S_k, S_ε 은 원천항, $\mu_t=\rho C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon}$ 은 란류점성, C_μ 는 모형상수이다. 모형상수들은 표준적으로 아래의 값을 가진다.

$$C_{1s}=1.44,\ C_{2s}=1.92,\ C_\mu=0.99,\ \sigma_k=1.0,\ \sigma_\varepsilon=1.3$$

에네르기방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}\int_\tau\left(\frac{V^2}{2}+U\right)\rho d\tau&=\int_{\tau_0}\left(\frac{V^2}{2}+U\right)\rho d\tau_0+\int_{\partial\tau_0}\left(\frac{V^2}{2}+U\right)\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\rho d\sigma_0=\\ &=\int_{\tau_0}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V}\rho d\tau_0+\int_{\partial\tau_0}\boldsymbol{P}_n\boldsymbol{V}d\sigma_0+\int_{\partial\tau_0}q_n d\sigma_0+\int_\tau q_f\rho d\tau_0=\dot{Q}-\dot{W}\end{aligned} \tag{4}$$

여기서 U 와 $V^2/2$ 은 류체단위질량당 내부에네르기와 운동에네르기이다. 그리고 q_n 은 경계면을 통하여 류체덩어리로 들어오는 열량이고 q_f 는 단위체적당 점성응력(내부마찰력)이 수행한 일과 복사 등에 의하여 전달되는 열량이다.

2) 경계조건

입구－속도경계조건 $V=V_{in}$, 출구－압력조건 $P=P_a$, 벽－부착조건 $\vec{V}_w=0$

2. 수치모의와 결과분석

흐름을 균일하게 보장하기 위한 방법을 찾기 위하여 먼저 가운데판과 아래벽사이에 경사판을 설치하고 입구속도 10m/s, 출구압력을 대기압으로 주고 계산실험을 진행하였다.

계산결과는 세로방향의 공기흐름이 오른쪽 끝에서만 밖으로 나가고 왼쪽 끝에서는 안쪽으로 진행된다는것을 보여주었다.

이런 방법으로는 공기의 균일흐름을 보장할수 없다는것을 알수 있다. 그래서 구멍들의 공기입구반대쪽 끝에 판을 달아주고 계산실험을 진행하였다. 제작상 편의를 위하여 가운데판을 잘라 접어주는 방법으로 구멍뒤쪽의 판을 만들어주게 하였으므로 판의 길이는 구멍크기를 넘을수 없다. 그래서 가운데판을 기울어지게 설치하고 판들의 길이를 조절하면서 계산실험을 진행하였다.

입구에서 속도를 5m/s로 주고 출구에 대기경계조건을 주었다. 란류모형으로는 표준 $k-\varepsilon$ 표준모형을 리용하였다. 계산구역의 크기는 가로 3m, 세로 50cm이다. 계산그물의 요소수는 45 000개이다.

판의 뒤쪽을 175mm 낮추고 구멍의 크기는 100mm로 8개 등간격으로 배치하였으며 구멍뒤의 판들의 크기를 각각 95, 90, 90, 90, 85, 85, 100, 100mm로 주었을 때 흐름의 균일성이 잘 나타났다.

그림 3에 출구에서 세로방향속도분포를 주었다.

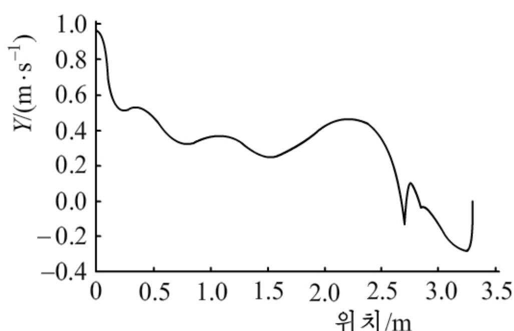


그림 3. 세로방향속도분포

계산결과에서 볼수 있는것처럼 출구쪽에서 세로방향속도분포는 저항판아래로 흐르는 가열공기가 건조기의 모든 공간에 골고루 분포되면서도 입구쪽으로 치우치는 경향이 있다. 이것은 건조기의 출구를 입구의 반대쪽이 아니라 바로 그우에 설치하면 들어오는 제품을 모든 공간에서 고르롭게 건조할수 있다는것을 알수 있다.

맺 는 말

계산실험을 통하여 다단열풍건조기내부에서 공기흐름을 균일하게 보장하기 위해서는 구멍뒤에 저항격판을 달아주어야 한다는것을 알수 있었다. 또한 열풍건조로에서 공기흐름을 균일하게 보장하기 위한 저항판의 치수와 구멍크기, 간격을 결정하였다.

참 고 문 헌

[1] T. H. Shih et al.; Computers Fluids, 24, 3, 227, 1995.
[2] K. S. Chou et al.; Trends in Food Science and Technology, 12, 10, 359, 2001.
[3] Q. Z. Han et al.; Liquor-making Science and Technology, 7, 61, 2010.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

A Method for Uniform Velocity Distribution at the Inlet of Multistage Hot Air Dryer

Kim Ui Song, Kim Kwang Hyok

We analyze the velocity distribution in a multistage hot air dryer and find that we can set up the obstacle plate behind the hole for uniform velocity distribution at the inlet of the hot air dryer. And we determine the size of obstacle plate, the size and interval of the hole for uniform velocity distribution at one type of multistage hot air dryer.

Key words: hot air dryer, numerical simulation

김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

한가지 자유분사흐름에 대한 수치모의연구

김 철 석

선행연구[3]에서는 자유분사흐름의 특성량들을 정의하고 계산하는 아브라모비츠공식을 소개하였다. 또한 정상자유분사흐름을 계산하기 위하여 대기경계조건으로는 압력조건을 주고 란류모형으로는 표준 $k-\varepsilon$ 모형을 리용하였다.[1] 여기서 압력－속도련결방법은 SIMPLE도식이고 계산속도를 가속시키기 위하여 다중그물해석기를 리용하였다.

선행연구[2]에서는 가로진동하는 류입흐름을 가지는 란류혼합층의 직접수치모의를 진행하였다.

론문에서는 눈막이에 리용되는 한가지 자유분사흐름장치에서의 흐름을 해석하는 방법을 제기하고 설계제작하여 측정한 실험자료로 해석방법의 타당성을 확증하였다.

1. 수치계산방법

1) 기본방정식

자유분사흐름에서 성립하는 기본방정식들은 다음과 같다.

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0 \tag{1}$$

$$\rho(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=\rho F-\nabla p+\nabla\cdot\sigma-\rho\nabla\left(\frac{2}{3}k\right)+\boldsymbol{F}_p \tag{2}$$

$$\sigma=2\mu\dot{S}-\frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\boldsymbol{V}) \tag{3}$$

여기서 $\boldsymbol{V}$ 는 공기의 속도, ρ 는 공기의 밀도, p 는 압력, k 는 란류운동에네르기, μ 는 동력학적점성결수, $\dot{S}$ 는 변형속도텐소르, F 는 질량힘의 세기이다.

란류에 대한 $k-\varepsilon$ 모형의 란류수송방정식들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\rho\nabla\cdot(\boldsymbol{V}k)&=-\frac{2}{3}\rho k(\nabla\cdot\boldsymbol{V})+\sigma(\nabla\cdot\boldsymbol{V})+\nabla\left[\left(\frac{\mu_e}{\mathrm{Pr}_k}\right)\nabla k\right]-\rho\varepsilon\\ \rho\nabla\cdot(\boldsymbol{V}\varepsilon)&=-\left(\frac{2}{3}C_{\varepsilon1}-C_{\varepsilon2}\right)\rho\varepsilon(\nabla\cdot\boldsymbol{V})+\nabla\left[\left(\frac{\mu_e}{\mathrm{Pr}_\varepsilon}\right)\nabla\varepsilon\right]+\frac{\varepsilon}{k}[C_{\varepsilon1}\sigma(\nabla\cdot\boldsymbol{V})-C_{\varepsilon2}\rho\varepsilon]\end{aligned} \tag{4}$$

여기서 k 는 란류운동에네르기, ε 은 란류점성산일률, μ_e 는 유효점성결수, $c_{\varepsilon1}$, $c_{\varepsilon2}$, c_μ 는 상수이고 Pr_k, Pr_ε 은 란류확산을 지배하는 란류프란틀수이다.($c_{\varepsilon1}=1.44$, $c_{\varepsilon2}=1.92$, $c_\mu=0.09$, $\mathrm{Pr}_k=1.0$, $\mathrm{Pr}_\varepsilon=1.3$)

2) 경계조건

입구－ $U_{in}=Q/S=40\mathrm{m/s}$, 관벽－ $U_{wall}=0$, 지면－ $U_{ground}=0$, 출구－ $p_{out}=p_{대}$

3) 계산방법

수치계산에서 리산화도식은 1계풍상리산화도식이고 압력－속도련결방법은 SIMPLE도식을 리용하였다. 그리고 완화파라메터들은 기정으로 하였으며 초기입구에서 란류운동에네르기와 점성산일률은 아래와 같은 식에 따라 주었다.

$$k = (0.05\upsilon_{in})^2 = 4\text{m}^2/\text{s}^2,\ \ \varepsilon = \frac{0.09^{3/4}\cdot k^{3/2}}{l},\ \ l = 0.07D_{in} \tag{5}$$

여기서 D_{in}은 입구관로의 등가직경이고 υ_{in}은 입구속도이다.

수렴성기준은 련속성이 10^{-7} 정도로 되게 주었다.

2. 계산결과와 분석

그림 1에서는 한가지 자유분사흐름장치의 기본부분인 분사노즐의 리론도를 보여주었다.

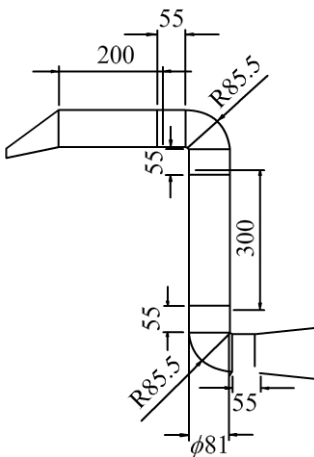


그림 1. 분사노즐의 리론도(mm)

계산그물수는 18만개와 31만개, 60만개로 하였다.

다음 류체흐름해석프로그람인 FLUENT6.326으로 수렴오차가 10^{-7} 정도될 때까지 계산을 진행하였다. 이때 송풍기에서 출구속도는 40m/s이다. 여기서는 내부흐름구역과 외부흐름구역이 동시에 존재하므로 관벽에서의 y^+ 조건도 만족시켜야 하고 지면과 대기구역에서의 경계조건도 충분히 고려하여야 한다. 즉 류체력학의 내부문제와 외부문제를 함께 풀어야 한다.

그물수가 31만개인 경우와 60만개인 경우에 분사노즐출구속도와 입출구압력차를 비롯한 계산결과들이 같았다. 그러므로 우리는 그물수가 31만개이상부터 계산결과가 요소수에 무관계하다는것을 확증할수 있었다.

그림 2와 3에서는 요소수가 31만개일 때 흐름의 전구간에서 속도분포와 압력분포를 보여준다.

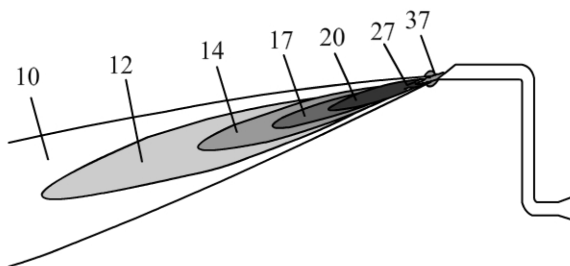


그림 2. 속도분포(m/s)

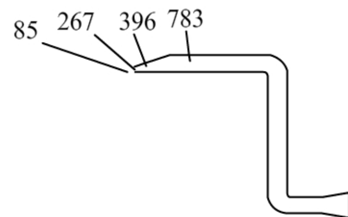


그림 3. 압력분포(Pa)

그림 4에서는 수치계산결과와 설계제작한 자유분사흐름장치로 측정한 실험값을 비교하였다.

그라프에서 보여주는바와 같이 수치계산값과 실험값과의 상대오차는 6%정도이다.

그러므로 앞에서 론의한 수치계산방법을 다른 자유분사흐름의 해석과 설계에 리용할수 있다.

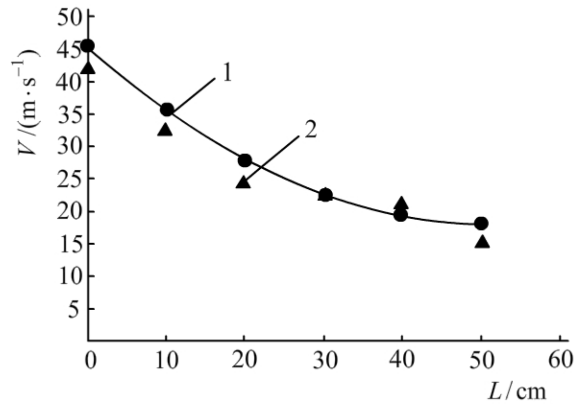


그림 4. 수치계산결과와 실험값과의 비교
1－CFD계산값, 2－실험값

참 고 문 헌

[1] X. Zhou et al.; Computers and Mathematics with Applications, Pergamon, 179～191, 2015.
[2] Y. Kametani; Journal of Fluid Science and Technology, Bulletin of the JSME, 10, 1, 1, 2015.
[3] H. Schlichting; Boundary-Layer Theory, McGraw-Hill, 136～157, 1987.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

Numerical Simulation Research on a Free Jet Flow

Kim Chol Sok

We propose the analysis method on a free jet flow, design and manufacture the equipment for this method. Then validity of the proposed analysis method is proved by comparison between measuring data and calculation ones.

Key words: free jet flow, numerical simulation, internal flow, external flow

김일성종합대학학보　　　　　　　　　　　　　　　　　　　주체108(2019)년
수 학　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　제65권　제4호

용기안에서 액체출렁임현상의 고유진동수결정을 위한 한가지 수치모의방법

서금혁, 한의철

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《우리는 과학기술을 발전시켜도 남들이 걸은 길을 따라만 갈것이 아니라 우리 과학자들의 애국충정과 우리 인민의 슬기와 민족적자존심을 폭발시켜 년대와 년대를 뛰여넘으며 비약해나가야 합니다.》

용기안에서의 류체운동은 류체와 용기사이의 호상작용을 고려하는 류체동력학문제로서 오래전부터 많이 연구되여왔다. 선행연구[1]에서는 연료탕크안에서의 2상(액체－기체)흐름해석의 정확성을 높이기 위한 한가지 방법으로서 자동그물적합방법을 제기하였다. 액체－고체접촉면의 복잡한 궤적을 추적하기 위하여 론문에서는 CFD의 VOF모형을 리용하였는데 VOF모형은 계산오차를 줄이기 위하여 매 접촉면위치에서의 그물분할을 세밀히 할것을 요구한다.

선행연구[1]에서는 가로진동하는 간단한 용기와 경기용자동차의 윤활유탕크에서의 출렁임문제에 대한 해석에 자동그물적합방법을 적용하여 계산정확도를 높이였다. 선행연구[2]에서는 2차원 및 3차원 CFD해석을 통하여 각이한 형태의 연료탕크들에서의 연료출렁임과 출렁임방지판을 리용한 출렁임감소문제에 대하여 연구하였다.

우리는 액체－기체 2상흐름의 CFD적해석방법을 리용하여 탕크안에서의 액체출렁임의 고유진동수를 결정하기 위한 한가지 수치모의방법에 대하여 연구하고 해석풀이와의 비교속에서 그 타당성을 검증하였다.

1. 문제설정

출렁임은 파동현상으로서 중력과 겉면장력 그리고 표면운동학에 의하여 일어난다. 우리는 용기안에서의 액체출렁임을 해석하기 위하여 한가지 원기둥형용기안에서 초기에 자유표면이 일정한 각도로 경사져있던 액체의 출렁임의 고유진동수를 결정하는 문제를 설정하였다.

용기안에서의 액체의 출렁임은 액체－기체 2상의 호상작용을 포함하며 VOF모형을 리용하여 모의할수 있다. 두 상사이의 경계면은 상들의 체적비에 관한 련속방정식풀이를 통하여 얻을수 있다. q^{th}상에 관해서 이 방정식은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\frac{1}{\rho_q}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_q\rho_q)+\nabla\cdot(\alpha_q\rho_q\boldsymbol{v}_q)\right]=S_{\alpha_q}+\sum_{p=1}^{n}(\dot{m}_{pq}-\dot{m}_{qp}) \tag{1}$$

여기서 $\dot{m}_{qp}$는 상 q로부터 p상에로의 질량수송이고 $\dot{m}_{pq}$는 상 p로부터 상 q로의 질량수송이다. 오른변의 원천항 S_{α_q}는 령이다. 만일 매 상에 대하여 어떠한 질량원천이 있

으면 설정할수 있다. 매 상들의 체적비들사이에는 다음의 관계식이 성립한다.

$$\sum_{q=1}^{n} \alpha_q = 1 \quad (2)$$

체적비방정식은 음적이나 양적인 시간리산화를 통하여 풀수 있다.

수송방정식들에서 나타나는 속성들은 매 조종체적에서 구성성분상들의 존재에 의하여 결정할수 있다. 실례로 2상문제의 경우 매 세포에서의 밀도는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\rho = \alpha_2 \rho_2 + (1-\alpha_2)\rho_1 \quad (3)$$

일반적으로 n상문제에서는 $\rho = \sum \alpha_q \rho_q$ 로 된다. 점성과 같은 다른 속성들도 이와 같이 계산할수 있다.

2. 수치모의방법

우리는 용기안에서의 출렁임을 해석하기 위하여 그물작성을 다음과 같이 하였다.

용기의 직경은 $D = 15.24\text{cm}$ 이고 용기의 높이는 $H = 27.94\text{cm}$ 이며 액체는 초기에 xy평면상에서 일정하게 경사져있었다고 가정하고 계산그물수의 견지에서 흐름의 z축상에서의 대칭성을 고려하여 원기둥용기의 반모형을 반영하였다. 또한 x축상에서 그물의 대칭성을 보장하도록 용기의 바닥면의 그물을 작성하고 계산결과에 미치는 그물분할의 영향을 고려하여 전체 그물분할을 3mm 크기의 6면체요소그물(대략 10만개)로 작성하였다.[2]

용기안에서의 출렁임해석을 위하여 류체전용해석프로그람 FLUENT의 다상매질흐름해석모형인 VOF모형을 리용하였다. 용기의 웃면은 열려져있으며 이로부터 VOF의 개수로흐름모형(중력가속도 $g = 9.8\text{m/s}^2$)을 리용하였다.

매질들의 특성량들은 표 1과 같다.

표 1. 매질들의 특성량

매질	밀도 $/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	점성결수 $/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1})$
액체(연료)	618	0.000 248 8
기체(공기)	1.225	0.000 017 894

용기의 옆면과 바닥에서는 벽조건으로서 비미끄럼조건을 설정하고 용기웃면은 압력출구조건으로서 대기압이 작용하도록 하였다.

그림 1에서 초기조건과 경계조건을 제시하였다.

계산에서는 용기안에서의 류체운동을 층류로 가정하고 압력−속도련결도식으로서는 SIMPLE도식을 리용하였으며 모든 계산오차들을 10^{-4} 이하로 수렴시켰다. 이때 매 시간걸음에서의 반복수는 40~60정도였다.

비정상계산에서 류체의 질량중심의 자리표를 계산하기 위한 UDF를 작성하고 매 시간걸음에서의 질량중심을 계산하

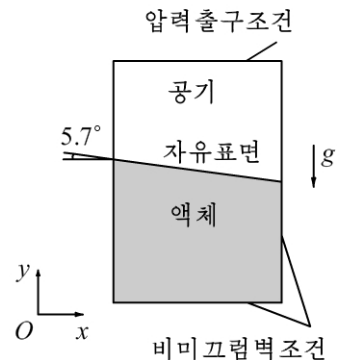


그림 1. 초기조건과 경계조건

여 출렁임의 고유진동수를 결정하였다.

일반적으로 요소들로 이루어진 계의 질량중심의 자리표는 다음과 같이 계산할수 있다.

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{\sum_i \rho_i V_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i \rho_i V_i}$$

여기서 $\rho_i, V_i, \boldsymbol{r}_i$는 각각 i번째 요소의 밀도와 체적, 요소중심의 자리표벡토르이고 $\boldsymbol{r}_c$는 질량중심의 자리표벡토르이다.

UDF에서는 매 시간걸음의 계산이 끝난 후 매 그물요소에서의 밀도와 체적, 자리표를 얻어내여 용기안의 류체의 질량중심을 계산하였다.

3. 계산결과와 분석

원기둥용기안에서의 출렁임의 고유진동수는 해석적으로 다음과 같이 계산할수 있다.[3]

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1.841g}{R}\,\mathrm{th}\left(\frac{1.841h}{R}\right)}$$

여기서 h는 액체의 높이이고 R는 용기의 밑면반경이다.

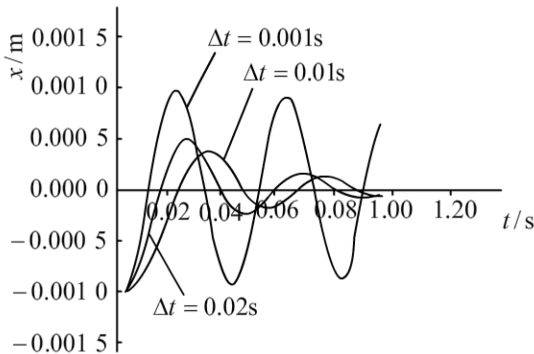


그림 2. 시간에 따르는 류체질량중심의 위치변화

계산에서는 먼저 시간걸음의 크기에 따르는 계산정확도를 평가하기 위하여 $h/R = 1.8$인 경우 시간걸음의 크기를 0.02, 0.01, 0.001s로 변화시키면서 계산을 진행하여 해석풀이와 비교하였다. 결과 시간걸음을 $\Delta t = 0.001$s로 할 때 시간걸음크기의 영향을 무시할수 있다는것을 알수 있었다.

그림 2에서는 시간에 따르는 류체질량중심의 위치변화를 보여주었다.

다음은 용기안에서 액체의 높이에 따르는 출렁임의 고유진동수를 계산하였다. 표 2에서는 각이한 액체높이에 따르는 출렁임의 고유진동수계산결과를 해석풀이와 비교분석하였다.

표 2. 각이한 액체높이에 따르는 출렁임의 고유진동수계산결과

액체높이	h/R=1.8	h/R=1.0	h/R=0.5
해석풀이	2.446Hz	2.388Hz	2.087Hz
수치풀이	2.433 Hz	2.312Hz	2.044Hz
오차	0.5%	1.3%	2.1%

그림 3에서는 시간에 따르는 질량중심의 위치변화를 보여준다. 해석풀이와의 비교를 통하여 우리가 론문에서 연구한 용기안에서의 액체출렁임에 대한 수치계산방법이 아주 높은 정확도로 해석풀이와 일치한다는것을 알수 있다.

이와 같이 용기안의 액체높이에 따르는 액체출렁임의 고유진동수를 결정할수 있는

한가지 수치계산방법을 연구하고 그 타당성을 검증하였다. 론문의 방법은 용기의 가속과 회전을 비롯한 여러가지 운동으로 인한 액체출렁임의 해석에 리용할수 있다.

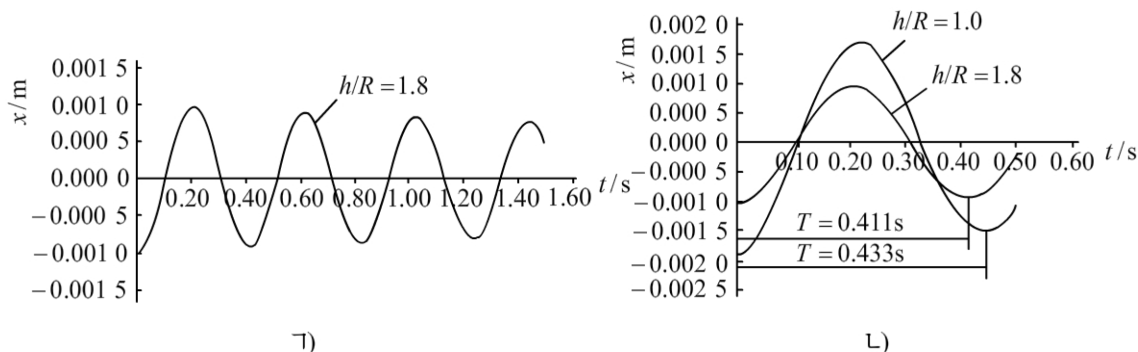


그림 3. 시간에 따르는 질량중심의 위치변화

ㄱ) $h/R=1.8$ 인 경우, ㄴ) $h/R=1.0$ 과 $h/R=1.8$ 인 경우의 비교

참 고 문 헌

[1] S. Fontanesi et al.; Energy Procedia, 81, 856, 2015.

[2] J. Hall et al.; Journal of Fluids and Structures, 56, 11, 2005.

[3] R. A. Ibrahim; Liquid Sloshing Dynamics, Theory and Applications, Cambridge University Press, 56～134, 2005.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

A Numerical Simulation Method for Prediction of the Natural Frequency of Iiquid Sloshing in a Container

So Kum Hyok, Han Ui Chol

In this paper, we study a numerical simulation method to determine the natural frequency of liquid sloshing in a container. We illuminate that the result of the unsteady solutions of CFD analysis of liquid-gas multiphase flow depends greatly on the size of time step and that the natural frequency considerably agrees with the analytical solutions.

Key words: sloshing, natural frequency

김일성종합대학학보　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　주체108(2019)년
수 학　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　제65권　제4호

한가지 2중배수원형양어탕크의 수력학적특성에 대한 CFD연구

안철호, 정인범

집약양어에 필수적인 큰 원형양어탕크의 운영에 편리하면서 수력학적특성도 좋은 새형의 2중배수양어탕크를 제안하고 그것의 주요수력학적특성을 3차원CFD모의를 통하여 고찰하였다. 선행연구[1]에서는 큰 원형양어탕크에서 중심바닥배수가 보다 우월한 수력학적특성을 가진다면 편심바닥배수는 양어작업과 탕크유지관리에서 결정적으로 우월하다는 것을 보여주었다.

론문에서는 우의 두가지 배수구를 결합한 2중배수탕크의 주요한 수력학적특성을 3차원CFD모의를 통하여 밝혔다.

1. 방 법

1) 수학적 및 물리적모형

양어못에서는 비교적 느린 물흐름이 진행되므로 비압축성점성흐름에 관한 련속방정식, 운동방정식, 자름응력수송(SST) $k-\omega$ 모형방정식으로 기본방정식계를 구성하였다.[2]

2) 기하 및 그물모형

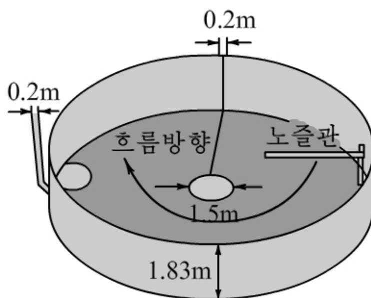


그림 1. 탕크모형

직경이 9.15m인 2중바닥배수원형탕크[1]를 연구한다.(그림 1)

탕크의 나머지치수들은 선행연구[1]에서와 같다. 점성밑층을 분해하도록 탕크벽과 바닥에 첫 층높이 0.000 15m, 증가비 1.2인 18개 층(높이 약 0.019m)의 경계층그물을 설정하고 나머지구역은 보다 큰 6면체세포들로 채웠다. 이것은 SST $k-\omega$ 란류모형과 개선된 벽처리의 요구[3]대로 벽린접세포에서 $y^{+}=1$ 수준을 보장한다.[2] 매 탕크에 대하여 그물독립적인 그물모형중 가장 작은 세포수를 가지는 모형을 수치모의를 위한 그물모형으로 선택하였다. 나머지 초기 및 경계조건설정은 선행연구[1]와 동일하다.

3) 물공급속도와 새물혼합모형화

물회전을 위한 노즐분사속도는 각각 0.335, 0.67, 1.34m/s의 세가지로 설정하였다. 탕크에 이미 있던 물에로 들어가는 새물을 추적자(류체)로 간주하면 그 질량비수송방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho C)+\nabla\cdot(\rho C\boldsymbol{v})=\nabla\cdot(\Gamma\nabla C) \tag{1}$$

여기서 ρ 는 추적자의 밀도, C 는 추적자의 질량비, $\boldsymbol{v}$ 는 추적자의 속도, Γ 는 물의 자체

확산결수와 같은 추적자의 확산결수이다. 순수한 물의 자체확산결수는 $2.135\times10^{-9}\,m^2/s$로 취하였다.[2] 식 (1)은 다름아닌 FLUENT의 사용자정의스칼라수송방정식이다. 새물공급시작점에서 탕크안의 *C*값은 0, 주수구의 *C*값은 1로 설정하고 *C*의 과도적거동을 수치적으로 추적하였다. 제기한 수치모형의 유효성검증은 실측자료와 CFD모의결과를 비교한 선행연구[1]의 모형검증으로 대신하며 여기서는 반복하지 않는다.

2. 결 과

1) 물흐름속도특성

노즐분사속도에 따르는 속도특성량들은 표 1과 같다.

표 1. 노즐분사속도에 따르는 속도특성량

노즐분사속도 /($m\cdot s^{-1}$)		0.335	0.67	1.34
속도크기 /($m\cdot s^{-1}$)	평균	0.067 5	0.143 2	0.299 2
	최대	0.622 9	1.239 8	2.469 7
	최소	0.000 02	0.000 6	0.012 7
축방향속도 /($m\cdot s^{-1}$)	평균	0.000 2	0.000 4	0.000 8
	최대	0.622 9	1.239 8	2.469 7
	최소	–0.600 5	–1.199 2	–2.395 7
반경방향속도 /($m\cdot s^{-1}$)	평균	0.000 4	0.000 9	0.001 8
	최대	0.617 1	1.231 1	2.456 7
	최소	–0.211 1	–0.425 7	–0.857 2
접선방향속도 /($m\cdot s^{-1}$)	평균	–0.065 7	–0.139 8	–0.292 5
	최대	0.270 7	0.543 5	1.090 1
	최소	–0.339 1	–0.678 0	–1.355 5

표 1에서 축방향, 반경방향, 접선방향속도성분들의 《－》부호는 각각 중력방향, 향심방향, 노즐분사방향이라는것을 의미한다. 표 1에서와 같이 노즐분사속도를 2배로 늘일 때 속도크기, 축방향속도, 반경방향속도, 접선방향속도의 평균값, 최대값, 최소값들은 대체로 2배정도 증가한다. 선행연구[1]와 비교해보면 2중배수탕크의 속도특성량의 평균값들은 중심배수탕크와 측면배수탕크들과 아주 류사하다. 한편 2중배수탕크의 속도특성량들의 최대값은 모두 중심 및 편심배수탕크들에 비해 약 절반값을 가진다.

두 배수구를 완전히 개방할 때 노즐분사속도에 따르는 두 배수구에서의 배수속도평균값들을 표 2에 보여주었다. 표에서 VCD, VED는 각각 중심배수구와 편심배수구의 배수속도를 표시한다.

표 2. 노즐분사속도에 따르는 두 배수구에서의 배수속도평균값

노즐분사속도 /($m\cdot s^{-1}$)	VCD /($m\cdot s^{-1}$)	VED /($m\cdot s^{-1}$)	VED/VCD
0.335	0.429 4	0.477 5	1.112
0.67	0.858 6	0.951 8	1.109
1.34	1.717 1	1.898 1	1.105

결과에 의하면 편심배수구의 배수속도는 중심배수구에 비해 약 11% 더 크다. 탕크안

의 물이 회전할 때 편심배수구는 보다 큰 동적힘을 받으므로 이것은 자연스러운 결과이다. 이 결과는 동일한 조건하에서 측면배수량이 중심배수량보다 얼마나 그리고 왜 더 큰가를 보여준다. 보다 높은 배수속도는 양어실천에서 중요한 기술적우점으로 된다.

흐름속도성분과 관련한 전형적인 특성은 접선속도마당에서 찾아볼수 있다. 그림 2는 노즐분사속도가 0.335m/s일 때 [−0.05m/s, 0]의 범위의 낮은 접선속도구역의 모양을 중심배수탕크, 편심배수탕크에 대한 선행연구[1]의 결과와 비교하여 보여주었다. 그림에서 《−》부호는 노즐분사에 의한 물회전방향을 가리킨다.

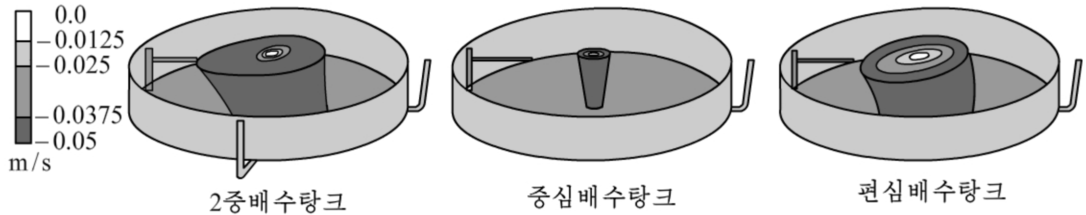


그림 2. 낮은 접선속도구역의 모양

결과에 의하면 2중배수탕크에서 접선속도가 작은 구역의 크기는 편심배수탕크와 류사하다. 이것은 2중배수탕크에서 회전흐름특성이 편심배수탕크에 보다 가깝다는것을 보여준다.

2) 새물의 혼합속도

새물을 노즐분사하면서 전체 탕크물체적에서 새물의 평균체적비와 배수구에서 새물의 체적비를 평가하였다.(그림 3) 그림 3에서 VR_t, VR_0은 각각 전체 탕크에서 평균체적비, 배수구에서 체적비를 의미한다.

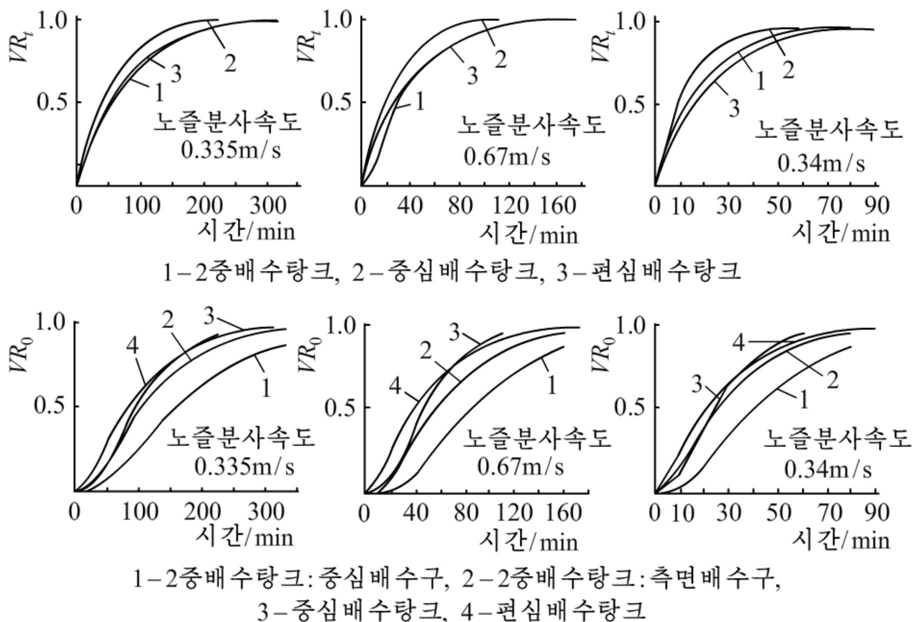


그림 3. 전체 탕크에서 평균체적비(우)와 배수구에서 체적비(아래)

새물의 평균체적비가 0.98에 도달하는 시간이 가장 짧은것은 중심배수탕크이다. 노즐분사속도가 0.67m/s와 1.34m/s일 때 2중배수탕크의 시간은 편심배수탕크보다 10min 더 짧

고 반대로 0.335m/s일 때는 20min 더 길다. 이것은 2중배수탕크의 두 배수구로 빠지는 새물이 낮은 회전속도조건에서보다 큰 영향을 미친다는것을 보여준다. 2중배수탕크에서 편심배수구의 새물체적비는 편심배수탕크와 매우 비슷하고 중심배수탕크에서보다는 크다. 그림 3의 6개 곡선에서 공통적인것의 하나는 2중배수탕크가 새물혼합속도에 있어서 중심배수탕크보다 편심배수탕크에 더 가깝다는것이다. 노즐에서 출발하는 물립자자리길의 견지에서 편심배수구는 중심배수구보다 노즐에 훨씬 가깝게 배치되여있으므로 새물이 보다 빨리, 보다 많이 배수되므로 이것은 자연스러운 결과이다.

맺 는 말

이상의 결과들은 2중배수탕크가 수력학적으로 중심배수탕크보다 편심배수탕크에 더 가깝다는것을 보여준다. 즉 원형탕크에서 편심배수구의 수력학적영향이 중심배수구보다 더 크다. 그러므로 선행연구[1]에서 고찰한 중심배수의 수력학적우월성을 보존하면서 양어작업을 쉽게 하기 위한 한가지 방도는 중심 및 편심배수의 결합 즉 2중배수탕크를 도입하는것이다. 양어할 때는 중심배수구만 열고 수확과 청소를 비롯한 양어작업시에는 편심배수구를 여는 2중배수탕크는 집약양어에 필수적인 대규모양어탕크[3, 4]를 위한 가장 적합한 설계의 하나라고 말할수 있다.

참 고 문 헌

[1] An Chol-Ho et al.; Aquqcultural Engineering, 83, 138, 2018.
[2] F. Moukalled et al.; The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics, An Advanced Introduction with OpenFOAM® and Matlab®, Springer, 254～799, 2016.
[3] J. Oca et al.; Aquacultural Engineering, 52, 65, 2013.
[4] S. Summerfelt et al.; Aquacultural Engineering, 40, 62, 2009.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

CFD Simulation on Hydraulic Characteristics of a Dual-Bottom-Drain Circular Culture Tank

An Chol Ho, Jong In Bom

We consider typical hydraulic characteristics of a new dual-bottom-drain circular culture tank made by a combination of the center bottom drain tank which has better hydraulic properties and the eccentric bottom drain tank which is much more convenient for the labor requirement near the drain, using 3D CFD simulations.

Key words: dual-drain circular tank, CFD, drain, hydraulics

김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

림계짐제한하에서 보강곡면판구조의 최소체적설계문제

리철수, 김혁남

선행연구[1, 2]에서는 트라스구조에 대하여 국부안정성상실제한을 고려한 최량구조치수결정과 보강판의 최소림계짐최대화문제는 최량화규준법에 의하여 연구되고 선체구조에서 보강판의 림계짐제한하에서의 체적최소화문제가 유전알고리듬을 리용하여 연구되였다.[3]

론문에서는 보강곡면판에 대하여 림계짐제한하에서 체적을 최소화하기 위한 최량화규준을 결정하고 보강재치수결정문제를 연구하였다.

1. 림계짐제한하에서 보강곡면판구조의 최소체적설계를 위한 최량화규준

보강재의 치수만을 변화시키면서 면내누름짐이 주어질 때 안정성상실이 일어나지 않는 보강곡면판구조의 최소체적설계문제를 보겠다.

그림 1과 같이 보강재가 붙은 곡면판이 면내누르는 짐 σ_x의 작용을 받는다고 하자.

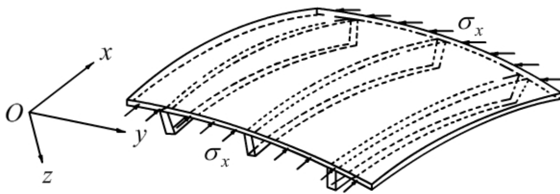


그림 1. 보강재를 가진 곡면판

구조를 유한요소들로 분할할 때 곡면판을 이루는 요소들의 번호모임을 I_1, 보강재에 속하는 요소들의 번호모임을 I_2라고 하면 $i \in I_1$인 요소 i에 대해서는 요소체적 V_i가 일정하므로 설계변수는 보강재에 속하는 요소들의 체적 $V_i\ (i \in I_2)$로 되며 체적최소화에 대한 목적함수식은

$$\sum_{i \in I_2} V_i \Rightarrow \min \tag{1}$$

으로 되고 면내누름짐에 대한 한계값이 σ_{x0}일 때 제한식은

$$\sigma_x(V_i) \ge \sigma_{x0}\ (V_i \in x) \tag{2}$$

으로 된다.

상태방정식제한(즉 안정성문제의 기본방정식)은

$$([\boldsymbol{K}] - \sigma_x[\boldsymbol{K}_G])\{\boldsymbol{w}\} = \{\boldsymbol{0}\} \tag{3}$$

과 같이 표시된다. 여기서 $[\boldsymbol{K}]$, $[\boldsymbol{K}_G]$는 각각 구조전체의 억세기행렬, 기하억세기행렬이고 $\{\boldsymbol{w}\}$는 곡면판의 처짐과 처짐각으로 표시되는 마디점변위벡토르이다.

기교변수 S를 도입하여 제한식을 등식제한으로 바꾸고 라그랑쥬함수를 구성하면 다음과 같이 표시된다.

$$L = \sum_{i \in I_2} V_i + \lambda[\sigma_x(V_i) - \sigma_{x0} - S^2] \tag{4}$$

함수 L의 극값조건

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial V_i}=0 \ \ (i\in I_2)\\&\frac{\partial L}{\partial S}=0\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

을 리용하여 최량화규준을 유도하자.

$\sigma_x(V_i)$에 관한 설계변수 $V_i\ (i\in I_2)$의 감도는 방정식 (3)으로부터

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial V_i}=\frac{\{\boldsymbol{w}\}^{\mathrm{T}}\left(\dfrac{\partial[\boldsymbol{K}]}{\partial V_i}-\sigma_x\dfrac{\partial[\boldsymbol{K}_G]}{\partial V_i}\right)\{\boldsymbol{w}\}}{\{\boldsymbol{w}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}_G]\{\boldsymbol{w}\}} \ \ (i\in I_2)$$

로 되고

$$\frac{\partial\sum_{j\in I_2}V_j}{\partial V_i}=\begin{cases}1 \ \ (i=j)\\0 \ \ (i\neq j)\end{cases}$$

이라는것을 고려하면 식 (5)의 첫째 식

$$\frac{\partial L}{\partial V_i}=0 \ \ (i\in I_2)$$

으로부터

$$1+\lambda\frac{\{\boldsymbol{w}\}^{\mathrm{T}}\left(\dfrac{\partial[\boldsymbol{K}]}{\partial V_i}-\sigma_x\dfrac{\partial[\boldsymbol{K}_G]}{\partial V_i}\right)\{\boldsymbol{w}\}}{\{\boldsymbol{w}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}_G]\{\boldsymbol{w}\}}=0 \ \ (i\in I_2) \tag{6}$$

이 얻어진다. 이제

$$\{\boldsymbol{w}\}^{\mathrm{T}}\frac{\partial[\boldsymbol{K}]}{\partial V_i}V_i\{\boldsymbol{w}\}=2U_{2i}$$

$$\{\boldsymbol{w}\}^{\mathrm{T}}\frac{\partial[\boldsymbol{K}_G]}{\partial V_i}V_i\{\boldsymbol{w}\}=2U_{2Gi}$$

$$\sum_{i\in I_2}U_{2i}=U_2,\quad \sum_{i\in I_2}U_{2Gi}=U_{2G}$$

라고 표시하면서 식 (6)의 량변에 대하여 i에 관한 합을 취하여 얻은 식과 식 (6)의 매개식에서 미정승수 λ를 소거하면 다음과 같은 관계식이 얻어진다.

$$\frac{U_{2i}-\sigma_x U_{2Gi}}{V_i}=\frac{U_2-\sigma_x U_{2G}}{\sum_{i\in I_2}V_i} \ \ (i\in I_2) \tag{7}$$

한편 식 (5)의 둘째 식에서 식 (6)을 고려하면 $S=0$이 얻어지며 이로부터 $\sigma_x(V_i)=\sigma_{x0}$이 얻어지므로 식 (7)로부터 전에네르기밀도균등화규준

$$\frac{U_{2i}-\sigma_{x0}U_{2Gi}}{V_i}=\frac{U_2-\sigma_{x0}U_{2G}}{\sum_{i\in I_2}V_i} \ \ (i\in I_2) \tag{8}$$

가 얻어진다. 이 규준의 의미는 주어진 면내짐 σ_{x0}을 받는 보강곡면판에서 안정성상실이 일어나지 않도록 보강재의 치수를 변경시킬 때의 최소체적구조는 보강재의 짐 σ_{x0}에 의

한 전에네르기밀도가 균등해지는 구조로 된다는것이다.

이 규준에 기초한 최량풀이탐색은 반복도식

$$V_i^{(k+1)} = \frac{U_{2i}^{(k)} - \sigma_{x0} U_{2Gi}^{(k)}}{U_2^{(k)} - \sigma_{x0} U_{2G}^{(k)}} \sum_{i \in I_2} V_i^{(k)} \quad (i \in I_2) \tag{9}$$

를 리용하여 진행할수 있다.

우의 반복도식 (9)를 리용하여 최량치수를 얻는 알고리듬은 다음과 같다.

걸음 1 $i \in I_2$ 에 대응하는 V_i 에 대하여 초기값 $V_i^{(0)}$ 을 주면 $i \in I_1$ 에 속하는 V_i 는 주어진 값을 그대로 유지하므로 모든 V_i 가 알려진것으로 된다. 이에 의하여 방정식

$$([K^{(0)}] - \sigma_x [K_G^{(0)}])\{w\} = \{0\}$$

을 풀어 $\sigma_x^{(0)}$, $\{w^{(0)}\}$ 을 구한다.

걸음 2 $\sigma_x^{(0)}$, $\{w^{(0)}\}$ 을 리용하여 $i \in I_2$ 에 대하여 $U_{2i}^{(0)}$, $U_{2Gi}^{(0)}$ 을 구하고 식 (9)로부터 $V_i^{(1)}$ 을 구한다.

걸음 3 $V_i^{(1)}$ 을 $V_i^{(0)}$ 으로 하여 걸음 1부터 반복한다. 수렴성조건

$$\left| \sum_{i \in I_2} V_i^{(k+1)} - \sum_{i \in I_2} V_i^{(k)} \right| \le \varepsilon \quad (k = 1,\ 2, \cdots)$$

을 만족시킬 때 $V_i^{(k+1)}$ 이 구하려는 최량풀이로 된다. 보강재요소에 대하여 길이가 주어져있으므로 매 보강재요소의 체적이 얻어지면 그로부터 자름면치수를 결정할수 있다.

2. 외압을 받는 보강원통관의 체적최소화를 위한 보강재치수결정실례

이 방법과 알고리듬에 기초하여 다음과 같은 외압을 받는 강철보강원통관의 최소체적설계를 진행하였다.(그림 2) 길이 6m, 반경 1.5m, 두께 1cm인 원통관의 량끝은 모두 접철지지되였으며 원통관의 바깥면에 압력 p 가 작용한다.

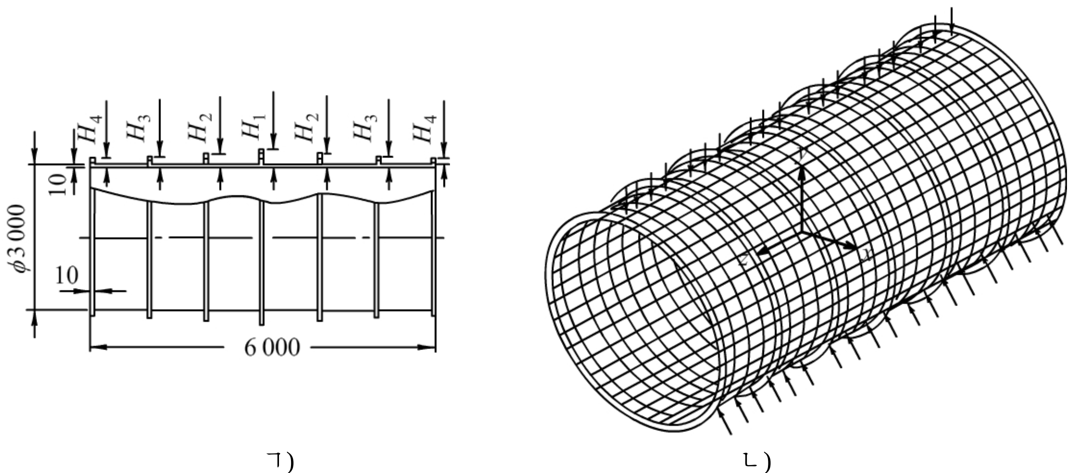


그림 2. 외압을 받는 강철보강원통관

ㄱ) 구조치수, ㄴ) 유한요소모형

이때 원통관의 체적은 $V_{10} = 0.565\text{m}^3$ 이며 최소림계짐은 0.264MPa이다. 구조의 안정성을 높이기 위하여 두께 1cm인 륵골을 1m 간격으로 원주방향을 따라 고리형으로 보강하였다. 초기에 보강륵골의 높이는 10cm이며 보강재의 총체적은 $V_{20} = 0.068\text{m}^3$ 이고 구조의 총체적은 $V_0 = 0.633\text{m}^3$ 이다. 이때 원통관과 보강륵골을 각각 1 133개, 231개의 유한요소로 모형화하고 유한요소해석을 진행하면 최소림계짐(외압)은 $p_0 = 1.227\ 5\text{MPa}$ 이며 원주방향 면내누름응력은 $\sigma_{x0} = 184.125\text{MPa}$ 이다.

최소림계면내누름짐이 $\sigma_{x0} = 184.125\text{MPa}$ 보다 크면서 구조의 체적이 최소로 되는 보강륵골들의 높이를 결정하자. 우에서 제기한 알고리듬을 리용하여 COSMOS/M의 2차개발 프로그람을 작성하고 최량화계산을 진행하면 8회 반복후에 풀이가 수렴하여 최량풀이가 얻어진다. 최량화후에 보강재의 높이는 $H_1 = 8.1\text{cm}$, $H_2 = 6.2\text{cm}$, $H_3 = 5.4\text{cm}$, $H_4 = 2\text{cm}$ 이며 구조의 총체적은 $V = 0.599\text{m}^3$ 이고 보강재의 총체적은 $V_{20} = 0.034\text{m}^3$ 이다. ANSYS의 최량화모듈을 리용하면 반복풀이는 대단히 진동하며 89회에서 최량풀이가 얻어지므로 이에 비하여 여기서 제기한 최량화규준법에 의한 방법과 알고리듬이 훨씬 효과적이라는것을 알수 있다.

맺 는 말

면내짐을 받는 보강곡면판에 대하여 주어진 림계짐제한하에서 구조의 체적을 최소화하기 위한 최량화규준을 유도하고 최량화알고리듬을 제기하였으며 한가지 수치실례를 통하여 적은 반복계산에 의하여 최량풀이가 얻어진다는것을 확증하였다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학, 64, 1, 113, 주체107(2018).
[2] 리철수 등; 기계공학, 2, 16, 주체102(2013).
[3] 上寺哲也; 日本造船海洋工学会論文集, 14, 1, 2011.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

The Problem of the Design for Minimum Volume of Reinforced Shell Structure Subject to Critical Load Constraint

Ri Chol Su, Kim Hyok Nam

In this paper, we derive the optimal criterion for the determination sizes of the reinforcement members in the problem of design for the minimum volume of the reinforced shell structure subject to the critical load constraint, present an optimization algorithm and verify the validity of the proposed method through an example.

Key words: critical load, reinforcement member

주체108(2019)년 차례묶음

제 1 호

제2호

제3호

제4호

Juche 108(2019) — Arrangement Bundle

Number 1

Number 2

Number 4

JOURNAL OF
KIM IL SUNG UNIVERSITY
Mathematics

Vol. 65 No. 4
JUCHE 108(2019)
(SN 576)

CONTENTS

Issued by
PUBLISHING HOUSE OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY

김일성종합대학학보 주체108(2019)년 제65권 제4호
수학 (루계 제576호)

편 집 위 원 회

낸 곳 김일성종합대학출판사
인쇄소 김일성종합대학인쇄공장
인쇄 주체108(2019)년 10월 30일 발행 주체108(2019)년 11월 10일

ㄱ－1972304 값 200원

DPR Korea
Address: Ryongnam-dong, Ryomyong Street,
Taesong District, Pyongyang
E-mail: ryongnamsan@star-co.net.kp
Fax: 0085-02-381-4410, 0085-02-381-4427

정기간행물번호
제19924호